Option Informatique en Spé MP et MP*
DS du 5 mars 2002

► Soit $\Sigma = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Un *mot* sur Σ de longueur $n \geqslant 1$ est une application m de $[\![0, n-1]\!]$ dans Σ ; nous noterons $m_i = m(i)$, $m = m_0 m_1 \dots m_{n-1}$ et $|m| = n$. En particulier, $\mathbf{0}$ (resp. $\mathbf{1}$) désigne le mot de longueur 1 dont l'unique lettre est $\mathbf{0}$ (resp. $\mathbf{1}$).

► Nous notons Σ^n l'ensemble des mots sur Σ de longueur $n \geqslant 1$, $\Sigma^+ = \bigcup_{n \geqslant 1} \Sigma^n$ et $\Sigma^* = \{\varepsilon\} \cup \Sigma^+$ où ε est le *mot vide*, de longueur nulle.

► La concaténation et les notions de facteur, facteur gauche (ou préfixe), facteur droit (ou suffixe) sont définies comme d'habitude.

► Un langage sur Σ est une partie L de Σ^*. Nous lui associons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où a_n est le nombre de mots de L de longueur n :

$$a_n = \mathrm{Card}\big(L \cap \Sigma^n\big)$$

ainsi que la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, et la fonction $f_L : z \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ somme de cette série entière.

► Nous noterons $[z^n]f(z)$ le coefficient de z^n dans le développement en série entière de $f(z)$; ainsi $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \big([z^n]f(z)\big) z^n$.

► La suite de Fibonacci est définie par les relations $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie I

Question 1 • Que pouvez-vous dire du rayon de convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$?

Question 2 • Soient L et M deux langages disjoints ; montrez que $f_{L\cup M} = f_L + f_M$.

Question 3 • Soient L et M deux langages ; définissons le langage

$$L \cdot M = \{uv \mid u \in L, v \in M\}$$

Nous supposons que la décomposition d'un élément de $L \cdot M$ est unique :

$$\big(uv = u'v' \text{ et } u, u' \in L \text{ et } v, v' \in M\big) \Rightarrow \big(u = u' \text{ et } v = v'\big)$$

Établissez $f_{L\cdot M} = f_L \times f_M$.

Question 4 • Caractérisez les langages dont la fonction associée est polynomiale.

Partie II

► Fixons $k \geqslant 1$. $\mathbf{0}^k$ désigne le mot formé de k lettres $\mathbf{0}$ consécutives. Notons L_k le langage formé des mots dont $\mathbf{0}^k$ n'est pas facteur, et f_k la fonction associée à L_k.

Question 5 • Explicitez L_1 et $f_1(z)$.

Question 6 • Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite associée à L_2. Explicitez a_0 et a_1, établissez une relation liant a_n, a_{n+1} et a_{n+2}. Quelle suite reconnaissez-vous ? Explicitez $f_2(z)$.

Question 7 • Notons M_k le langage formé des mots de longueur strictement inférieure à k et ne contenant aucune occurrence de $\mathbf{1}$. Justifiez l'égalité $L_k = M_k \cup \big(M_k \cdot \{\mathbf{1}\} \cdot L_k\big)$.

Question 8 • En déduire que $f_k(z) = \dfrac{1 - z^k}{1 - 2z + z^{k+1}}$.

Question 9 • Retrouvez ainsi les résultats des questions 5 et 6.

Partie III

▶ $k \geqslant 2$ étant fixé, nous nous proposons de déterminer un équivalent de $a_n = \text{Card}\big(L_k \cap \Sigma^n\big)$ lorsque n tend vers l'infini. Nous noterons $P_k = \sum\limits_{0 \leqslant i < k} X^i$.

Question 10 • Explicitez Q_k tel que $f_k(z) = \dfrac{P_k(z)}{Q_k(z)}$. Prouvez que $\dfrac{P_k}{Q_k}$ est irréductible.

Question 11 • Montrez que les racines de $1 - 2X + X^{k+1}$ sont simples.

Question 12 • Montrez que Q_k possède dans l'intervalle $]0, +\infty[$ une et une seule racine, que nous noterons α.

▶ Notons $T_k = X^k Q_k\big(\frac{1}{X}\big)$: T_k est clairement un polynôme unitaire de degré k.

Question 13 • Quelle relation *très simple* lie T_k et P_k ?

Question 14 • Montrez que T_k possède dans l'intervalle $]0, +\infty[$ une et une seule racine, que nous noterons β. Justifiez l'encadrement $1 < \beta < 2$.

▶ Nous pouvons alors écrire $T_k = (X - \beta)\left(X^{k-1} + \sum\limits_{1 \leqslant i < k} \lambda_i X^{k-1-i}\right)$.

Question 15 • Explicitez le système d'équations vérifié par la famille $(\lambda_i)_{1 \leqslant i < k}$. Résolvez ce système : vous exprimerez λ_i en fonction de β et de i.

Question 16 • Justifiez l'encadrement $0 < \lambda_i < 1$ pour $i \in [\![1, k-1]\!]$.

▶ Pour la question suivante, vous admettrez que les racines de T_k autres que β sont toutes de module strictement inférieur à β.

Question 17 • En utilisant la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P_k}{Q_k}$, prouvez la convergence de la suite de terme général $\dfrac{a_n}{\beta^n}$. Vous exprimerez sa limite μ en fonction de k et de β.

Question 18 • Dans cette question, k n'est plus fixé ; notons β_k l'unique racine de T_k de module supérieur à 1. Montrez que la suite $(\beta_k)_{k \geqslant 1}$ converge vers une limite ℓ que vous expliciterez.

Partie IV

▶ Fixons un mot m de longueur $k \geqslant 1$. Soit $i \in [\![0, k-1]\!]$; notons $c_i = 1$ si les facteurs gauche et droit de m de longueur $k - i$ sont égaux, c'est-à-dire $m_j = m_{i+j}$ pour tout $j \in [\![0, k-i-1]\!]$; sinon, notons $c_i = 0$. Remarquons que $c_0 = 1$, puisque les facteurs gauche et droit de longueur k de m sont tous deux égaux à m. Le *polynôme d'autocorrélation* (en abrégé PACO) de m est $P_m = \sum\limits_{0 \leqslant i < k} c_i X^i$.

Question 19 • Déterminez le PACO de $m =$ **0100101**.

Question 20 • Déterminez les mots de longueur 5 dont le PACO est $1 + X^3 + X^4$.

Question 21 • Existe-t-il des mots de longueur 6 dont le PACO est $1 + X^3 + X^4$?

▶ Notons G_m l'ensemble des mots dont aucun facteur n'est égal à m, g_m la fonction associée à G_m, W_m l'ensemble des mots dont m est suffixe et dont aucun autre facteur n'est égal à m, w_m la fonction associée à W_m.

Question 22 • Justifiez : $G_m \cup W_m = \{\varepsilon\} \cup (G_m \cdot \Sigma)$.

Question 23 • Pour $i \in [\![0, k-1]\!]$, notons d_i le suffixe de longueur i de m et $D_m = \{d_i : c_i = 1\}$. Justifiez l'égalité $G_m \cdot \{m\} = W_m \cdot D_m$.

Question 24 • Justifiez les relations $g_m(z) + w_m(z) = 1 + 2z g_m(z)$ et $z^k g_m(z) = w_m(z) P_m(z)$.

Question 25 • En déduire une expression de $g_m(z)$ ne faisant intervenir que z, k et P_m. Retrouvez le résultat de la question 8.

FIN