Option Informatique en Spé MP et MP*
Miroir d'un facteur

► Soit Σ un alphabet fini, contenant aux moins deux lettres. Soit $u \in \Sigma^*$, de longueur $n \geqslant 1$; pour $u \in [\![1, n]\!]$, nous noterons u_i la i-ième lettre de u. Pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, nous noterons $u[i..j]$ le facteur $u_i u_{i+1} \dots u_{j-1} u_j$ de u.

► Rappelons que le *miroir* $\widetilde{u}$ du mot u est défini par $\widetilde{\varepsilon} = \varepsilon$, et $\widetilde{u} = u_n u_{n-1} \dots u_1$ si $u = u_1 u_2 \dots u_n$.

► Le vecteur de Parikh du mot u est la famille $P_u = \big(|u|_x\big)_{x \in \Sigma}$, où $|u|_x$ désigne le nombre d'occurrences de la lettre x dans u.

► Soient u et v deux mots sur Σ ; nous noterons $u \to v$ lorsque v se déduit de u par «miroir d'un facteur». Plus rigoureusement : $u \to v$ ssi il existe des mots x, y et z tel que $u = xyz$ et $v = x\widetilde{y}z$. Clairement, cette relation est réflexive (prendre $y = \varepsilon$) et symétrique.

Question 1 • La relation $\to$ est-elle transitive ?

Question 2 • Soient u et v deux mots. Montrez que $u \to v$ ssi $\widetilde{u} \to \widetilde{v}$.

Question 3 • Soient u, v et t trois mots. Montrez que $u \to v$ ssi $tu \to tv$.

Question 4 • Proposez un algorithme testant si deux mots u et v de même longueur n vérifient $u \to v$. Cet algorithme devra effectuer $\mathcal{O}(n)$ comparaisons de lettres.

► Une opération «Cons» consiste à construire une liste `t::q` à partir de sa tête et de sa queue, ou à décomposer une liste en sa tête et sa queue, avec le motif `t::q`.

Question 5 • Rédigez en Caml une fonction de signature

```
fleche : 'a list -> 'a list -> bool
```

spécifiée comme suit : `fleche u v` décide si les mots u et v (représentés de façon naturelle par les listes `u` et `v`) vérifient $u \to v$. Votre fonction devra effectuer $\mathcal{O}\big(|u| + |v|\big)$ opérations «Cons». Vous pourrez utiliser la fonction `rev`, qui construit la liste $\widetilde{\ell}$ miroir d'une liste ℓ donnée, pour un coût $\mathcal{O}\big(|\ell|\big)$ opérations «Cons». L'emploi de références ou de structures de données mutables (vecteurs) est interdit.

► Soit L un langage quelconque sur l'alphabet Σ. Notons $\Phi(L)$ l'ensemble des mots $u \in \Sigma^*$ vérifiant $u \to v$ pour au moins un mot v de L.

Question 6 • Soit L un langage rationnel. $\Phi(L)$ est-il rationnel ?

Question 7 • Donnez un exemple de langage L non rationnel tel que $\Phi(L)$ soit rationnel.

Question 8 • Donnez un exemple de langage L non rationnel tel que $\Phi(L)$ ne soit pas rationnel.

► Notons $\xrightarrow{*}$ la clôture transitive de $\to$, définie comme suit : $u \xrightarrow{*} v$ ssi $u = v$, ou il existe une suite $(w_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de mots telle que $w_0 = u$, $w_i \to w_{i+1}$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, et $w_n = v$. Il est clair que $\xrightarrow{*}$ est une relation d'équivalence sur Σ^*.

Question 9 • Donnez une CNS pour que $u \xrightarrow{*} v$, faisant intervenir des vecteurs de Parikh.

Question 10 • Dans cette question uniquement, nous supposons $\Sigma = \{a,b,c\}$. Combien existe-t-il de classes modulo $\xrightarrow{*}$ de mots de longueur n ?

► Soit L un langage quelconque sur l'alphabet Σ. Notons $\Phi^*(L)$ l'ensemble des mots $v \in \Sigma^*$ vérifiant $u \xrightarrow{*} v$ pour au moins un mot u de L. Ainsi $\Phi^*(L)$ est la réunion des classes modulo $\xrightarrow{*}$ des mots de L.

Question 11 • Donnez un exemple de langage L non rationnel vérifiant les deux conditions suivantes : $\Phi(L)$ n'est pas rationnel ; $\Phi^*(L)$ est rationnel.

FIN