

# Option Informatique en Spé MP et MP\*

## Ideaux et langages rationnels : le corrigé

**Question 1** • Sens direct :  $L = L \cdot \{\varepsilon\} \subset L \cdot \Sigma^*$ . Pour l'inclusion inverse, considérons  $uv \in L \cdot \Sigma^*$  : si  $v = \varepsilon$ , alors  $u \in L$  ; sinon, notons  $n = |v|$  et  $v = v_1v_2 \dots v_n$  : une récurrence immédiate montre que  $uv_1v_2 \dots v_i \in L$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  ; en particulier,  $uv \in L$ .

• Réciproque : soient  $u \in L$  et  $x \in \Sigma$  ; à plus forte raison,  $x \in \Sigma^*$ , donc  $ux \in \Sigma^*$  puis  $ux \in L$ .

**Question 2** • Soit  $L$  un idéal à droite non vide de  $\Sigma^*$  ; notons  $p$  le plus petit exposant tel que  $a^p \in L$  : il est clair que  $L = \{a^k \mid k \geq p\} = \{a^p\} \cdot \Sigma^*$ . Réciproquement, le langage  $\{a^p\} \cdot \Sigma^*$  est un idéal à droite quel que soit  $p \in \mathbb{N}$ . Conclusion : lorsque  $\Sigma = \{a\}$ , les idéaux à droite de  $\Sigma^*$  sont  $\emptyset$  et les langages de la forme  $\{a^p\} \cdot \Sigma^*$  avec  $p \in \mathbb{N}$ .

**Question 3** •  $1 \Rightarrow 2$  : soit  $B'$  une partie propre de  $B$ . Considérons  $u \in B \setminus B'$  : comme  $B \subset L$ ,  $u \in L$  ;  $u$  ne possède aucun préfixe propre dans  $B$ , à plus forte raison dans  $B'$  donc  $u \notin B' \cdot \Sigma^*$  : ceci montre que  $B'$  n'engendre pas  $L$ . Comme  $B$  engendre  $L$  par hypothèse, on en déduit que  $B$  est une base de  $L$ .

•  $2 \Rightarrow 1$  : soient  $u \in B$  et  $v$  un préfixe propre de  $u$ . Si  $v$  appartenait à  $B$ ,  $B' = B \setminus \{u\}$  engendrerait de  $L$  ; en effet, considérons un mot  $x$  quelconque de  $L$  ; il possède un préfixe  $y$  dans  $B$  ; si  $y \neq u$ , alors  $y \in B'$  ; et si  $y = u$ , alors  $v \in B'$  est un préfixe de  $x$  ; dans tous les cas,  $x \in B' \cdot \Sigma^*$ . Ceci contredirait l'hypothèse affirmant que  $B$  est une base de  $L$ . Donc aucun mot de  $B$  n'est préfixe d'un autre mot de  $B$ .

**Question 4** • Montrons que  $\mathcal{B}(L)$  engendre  $L$ . Soit  $u \in L$  ; notons  $v$  le plus court préfixe de  $u$  appartenant à  $L$  :  $v$  n'a aucun préfixe propre dans  $L$ , donc  $v \in \mathcal{B}(L)$ , si bien que  $u \in \mathcal{B}(L) \cdot \Sigma^*$ .

• Par définition, aucun mot de  $\mathcal{B}(L)$  n'est préfixe propre d'un autre mot de  $\mathcal{B}(L)$ . La caractérisation 1 de la question 3 permet d'affirmer que  $\mathcal{B}(L)$  est une base de  $L$ .

• Soit  $B$  une base de  $L$  ; montrons que  $B = \mathcal{B}(L)$ . Considérons un mot  $u \in B$ , et supposons que  $u$  possède un préfixe propre  $v \in L$  ; comme  $B$  est une base de  $L$ ,  $v$  possède un préfixe  $w \in B$ . Ainsi,  $u$  possède un préfixe propre  $w \in B$  ; mais ceci contredit la caractérisation 1 de la question 3. Donc  $u$  n'a aucun préfixe propre dans  $L$ , ce qui prouve que  $u \in \mathcal{B}(L)$ . Soit maintenant  $u \in \mathcal{B}(L)$  ; alors  $u \in L$  ; comme  $B$  est une base de  $L$ ,  $u$  possède un préfixe  $v \in B$  ; comme  $\mathcal{B}(L)$  est une base de  $L$ ,  $v$  possède un préfixe  $w \in \mathcal{B}(L)$  ; du coup,  $w$  est préfixe de  $u$ . La définition de  $\mathcal{B}(L)$  implique  $u = w$ , donc  $u \in B$ .

**Question 5** • Il suffit de noter qu'un tel idéal s'écrit  $\bigcup_{u \in \mathcal{B}(L)} u \cdot \Sigma^*$ , et est donc rationnel en tant qu'union finie de rationnels.

**Question 6** • Soit  $L$  l'ensemble des mots de la forme  $a^n b^p v$ , avec  $n \leq p$  et  $v$  quelconque.  $L$  est clairement un idéal à droite. S'il était rationnel, il existerait (lemme de l'étoile) une constante  $N$  telle que tout mot  $u$  de  $L$  de longueur au moins égale à  $N$  se décompose en  $xyz$  avec  $|xy| \leq N$ ,  $y \neq \varepsilon$  et  $xy^*z \subset L$ . Considérons alors le mot  $u = a^N b^N$  : il appartient à  $L$ , et  $|u| = 2N \geq N$  ; la décomposition est de la forme  $x = a^j$ ,  $y = a^k$ ,  $z = a^{N-j-k} b^N$  avec  $k > 0$ . Mais alors le mot  $xy^2z = a^{N+k} b^N$  devrait appartenir à  $L$ , ce qui est manifestement faux.

**Question 7** • Le langage décrit par l'expression rationnelle  $a^*b(a+b)^*$  est un idéal à droite, mais sa base est infinie : c'est le langage décrit par l'expression rationnelle  $a^*b$ .

FIN