Option Informatique en Spé MP et MP*
Rangements : le corrigé

Questions préliminaires

Question 1 • On souhaite transférer un certain nombre de fichiers, logés dans un disque de forte capacité, sur des disquettes ; on suppose qu'aucun fichier n'a une taille supérieure à la capacité d'une disquette. Il s'agit exactement du problème posé, si l'on veut bien négliger quelques détails bassement informatiques...

Question 2 • L'application $i \mapsto i$ est un rangement (de coût n maximal) : elle est bijective, donc surjective ; et la deuxième condition est vérifiée car chaque objet a par hypothèse un volume au plus égal à celui d'un conteneur. Notons que ce rangement consiste à placer exactement un objet dans chaque conteneur.

• Le coût d'un rangement est compris entre 1 et n ; le nombre de rangements de coût $k \in [\![1,n]\!]$ est fini, puisqu'ils forment un sous-ensemble de l'ensemble des applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$. Donc l'ensemble de tous les rangements de $(X;c)$ est lui-même fini, en tant que réunion de n ensembles finis.

• Il existe k^n applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,k]\!]$. Donc le nombre de rangements est majoré par

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k^n \leqslant \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} n^n = n^{n+1}$$

Il est clair que ce majorant est très grossier !

Propriétés d'un rangement optimal

Question 3 • L'ensemble des coûts des rangements de l'entrée $(X;c)$ est un une partie non vide de $\mathbb{N}^*$; il possède donc un plus petit élément, lequel est le coût d'un rangement optimal.

Question 4 • Si $\pi(X) \leqslant c$, on peut ranger tous les objets dans un seul conteneur, si bien que $\omega(X;c) = 1$ dans ce cas.

Question 5 • Soit f un rangement optimal de l'entrée $(X;c)$. Il est clair que le volume total $\pi(X)$ de l'entrée est au plus égal au volume total $c\omega(X;c)$ offert par les conteneurs mis en jeu dans ce rangement, donc $\pi(X) \leqslant c\omega(X;c)$, soit $\dfrac{\pi(X)}{c} \leqslant \omega(X;c)$.

Question 6 • Soit f un rangement optimal de l'entrée $(X;c)$. Si nous notons $\lambda X = (\lambda X_1, \lambda X_2, \ldots, \lambda X_n)$, il est clair que le même rangement peut s'appliquer à l'entrée $(\lambda X; \lambda c)$; en effet, dans la deuxième condition, on peut multiplier les deux membres par $\lambda > 0$. Ceci montre qu'il existe au moins un rangement de coût $\omega(X;c)$ de l'entrée $(\lambda X; \lambda c)$, et par suite $\omega(\lambda X; \lambda c) \leqslant \omega(X;c)$. Mais le même raisonnement peut être appliqué à l'entrée $(\lambda X; \lambda c)$, en divisant cette fois par λ, pour obtenir l'inégalité inverse $\omega(X;c) \leqslant \omega(\lambda X; \lambda c)$, d'où l'égalité de l'énoncé.

Question 7 • Soit f un rangement optimal de l'entrée $(Y;c)$; il est clair que f convient comme rangement de l'entrée $(X;c)$ car, pour tout $i \in [\![1, \omega(Y;c)]\!]$:

$$\sum_{j \in \Omega_i} X_j \leqslant \sum_{j \in \Omega_i} Y_j$$

ceci, par sommation de l'inégalité $X_j \leqslant Y_j$ sur l'ensemble des $j \in \Omega_i$. Ayant exhibé un rangement de coût $\omega(Y;c)$ de l'entrée $(X;c)$, on peut affirmer que $\omega(X;c) \leqslant \omega(Y;c)$.

Question 8 • Notons $Z = (X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$. Soient f et g des rangements optimaux des entrées $(X;c)$ et $(Y;c)$ respectivement. Notons alors $m = \|f\|$ et $p = \|g\|$, et supposons $m \geqslant p$ pour fixer les idées, si bien que $\max(m,p) = m$. Nous allons construire un rangement h de coût m de $\big(Z;2c\big)$, ce qui prouvera que $\omega(Z;2c) \leqslant \max\big(\omega(X;c), \omega(Y;c)\big)$.

• Notons $h(j) = f(j)$ pour $j \in [\![1,n]\!]$, et $h(j) = g(j-n)$ pour $j \in [\![n+1, 2n]\!]$. Ceci a bien un sens, car, lorsque j décrit $[\![n+1,2n]\!]$, $j-n$ décrit $[\![1,n]\!]$. h est clairement une surjection de $[\![1,2n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$, puisque f est elle-même une surjection de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,m]\!]$. Reste à vérifier la deuxième condition ; soit $i \in [\![1,m]\!]$. Notons $\Omega_i = h^{-1}\big(\{i\}\big)$, $\Omega'_i = f^{-1}\big(\{i\}\big)$ et $\Omega''_i = g^{-1}\big(\{i\}\big)$. Notons que Ω''_i est vide si $i \in [\![p+1,m]\!]$. Il nous faut établir

$\sum_{j\in\Omega_i} Z_j \leqslant 2c$. Soit $j \in \Omega_i$; $h(j) = i$, donc ou bien $1 \leqslant j \leqslant n$, et alors $h(j) = f(j) = i$; ou bien $n+1 \leqslant j \leqslant 2n$, et alors $h(j) = g(j-n) = i$; autrement dit, soit $j \in \Omega_i'$, soit $j \in \Omega_i''$, une seule de ces deux relations étant vraie. Du coup :

$$\sum_{j\in\Omega_i} Z_j = \sum_{j\in\Omega_i'} X_j + \sum_{j-n\in\Omega_i''} Y_{j-n}$$

Mais $\sum_{j\in\Omega_i'} X_j \leqslant c$, et $\sum_{j-n\in\Omega_i''} Y_{j-n} = \sum_{k\in\Omega_i''} Y_k \leqslant c$, d'où $\sum_{j\in\Omega_i} Z_j \leqslant 2c$, ce qui achève la preuve.

Question 9 • Intuitivement, il semble plus facile de ranger des petits paquets que des gros ; ceci nous amène à prouver que :

$$\omega\big((X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n); c\big) \leqslant \omega\big((X_1+Y_1, X_2+Y_2, \ldots, X_n+Y_n); c\big)$$

En bref : la quantité de l'énoncé est positive.

• Soit f un rangement optimal de l'entrée $\big((X_1+Y_1, X_2+Y_2, \ldots, X_n+Y_n); c\big)$ et $m = \|f\|$. Construisons un rangement g de coût m de l'entrée

$$\big((X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n); c\big)$$

ce qui prouvera notre assertion.

• Pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, on a $\sum_{j\in\Omega_i} (X_j + Y_j) \leqslant c$, où $\Omega_i = f^{-1}\big(\{i\}\big)$; donc $\sum_{j\in\Omega_i} X_j + \sum_{j\in\Omega_i} Y_j \leqslant c$. Notons $Z = (X_1, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$: $Z_k = X_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$, et $Z_k = Y_{k-n}$ pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$. Considérons g défini par $g(k) = f(k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et $g(k) = f(k-n)$ pour $k \in [\![n+1, 2n]\!]$; on vérifie sans peine que l'on obtient ainsi une application surjective de $[\![1, 2n]\!]$ dans $[\![1, m]\!]$. Il reste à vérifier la deuxième condition.

• Soit $i \in [\![1, m]\!]$, $\Omega_i = g^{-1}\big(\{i\}\big)$, $\Omega_i' = \Omega_i \cap [\![1, n]\!]$ et $\Omega_i'' = \Omega_i \cap [\![n+1, 2n]\!]$. On aura

$$\sum_{j\in\Omega_i} Z_j = \sum_{j\in\Omega_i'} X_j + \sum_{j\in\Omega_i''} Y_j$$

Mais Ω_i' et Ω_i'' sont des parties de $f^{-1}\big(\{i\}\big)$; donc $\sum_{j\in\Omega_i'} X_j \leqslant \sum_{j\in f^{-1}(\{i\})} X_j$ et de la même façon $\sum_{j\in\Omega_i''} Y_j \leqslant \sum_{j\in f^{-1}(\{i\})} Y_j$, d'où par sommation :

$$\sum_{j\in\Omega_i} Z_j \leqslant \sum_{j\in f^{-1}(\{i\})} (X_j + Y_j) \leqslant c$$

• Notons que la quantité de l'énoncé peut être nulle : il suffit de prendre $n = 1$, $X_1 = Y_1 = c/2$ pour s'en convaincre.

Question 10 • Supposons d'abord que les X_i sont tous strictement supérieurs à $c/2$. On ne peut alors placer qu'un objet par conteneur, si bien que $\omega(X; c) = n$. Mais $\pi(X) > \dfrac{nc}{2}$, soit $n < \dfrac{2\pi(X)}{c}$, d'où l'inégalité du texte.

• Supposons maintenant qu'il existe aussi des objets de volume au plus égal à $c/2$. Regroupons ces objets pour obtenir des objets dont tous, sauf peut-être un, sont de volume strictement supérieur à $c/2$. Après le cas particulier précédent, il ne reste à examiner que le cas où les X_i sont tous, sauf un, de volume strictement supérieur à $c/2$. On peut supposer qu'il s'agit de X_n ; notant $\xi = \max_{1\leqslant i<n} X_i$, on a $\xi > c/2$, et on peut même supposer $X_n + \xi > c$ (sinon on pourrait placer X_n dans l'un des $n-1$ premiers conteneurs). L'unique rangement f envisageable a un coût égal à n ; mais

$$\pi(X) > (n-1)\xi + c - \xi = (n-2)\xi + c \geqslant \frac{(n-2)c}{2} + c = \frac{nc}{2}$$

D'où $\|f\| = n < 2\dfrac{\pi(X)}{c}$. Il est clair que f induit un rangement de l'entrée initiale $(X; c)$, de même coût ; d'où $\omega(X; c) < 2\dfrac{\pi(X)}{c}$.

Question 11 • $X = (60, 50, 15, 30, 45, 90, 75)$, donc $\pi(X) = 365$, si bien que $3.65 \leqslant \omega(X, c) < 7.3$; comme $\omega(X; c)$ est entier, ceci donne $\omega(X; c) \in [\![4, 7]\!]$. On peut facilement exhiber un rangement de coût 4 : il suffit de prendre $f(1) = f(4) = 1$, $f(2) = f(5) = 2$, $f(3) = f(7) = 3$ et $f(6) = 4$. Ceci montre que $\omega(X; c) = 4$.

Question 12 • Prenons $X_1 = X_2 = X_3 = 1/3$, et $X_i = 2/3$ pour $i \geqslant 4$. Il est clair que $\omega\big((X_4, X_5, \ldots, X_n); 1\big) = n-3$, car chacun des objets requiert un conteneur pour lui tout seul. Par contre, $\omega\big((X_1, X_2, \ldots, X_n); 1\big) \leqslant n-3$, car on peut placer les objets X_1 à X_6 dans trois conteneurs (en associant X_1 avec X_4, X_2 avec X_5 et X_3 avec X_6), puis les objets X_7 à X_n dans $n-6$ conteneurs. D'où l'inégalité demandée.

Question 13 • Il suffit de prendre $X_i = 0.6$ pour $i \geqslant 4$, puisque $\dfrac{1}{3} + 0.6 \neq 1$, et toute autre somme est strictement inférieure à 1 (si elle ne fait intervenir qu'un paquet, ou deux des trois premiers paquets), ou strictement supérieure à 1 (dans tous les autres cas).

Question 14 • $X = (60, 50, 15, 30, 45, 90, 75)$, donc $\pi(X) = 365$, si bien que $3.65 \leqslant \omega(X, c) < 7.3$; comme $\omega(X; c)$ est entier, ceci donne $\omega(X; c) \in [\![4, 7]\!]$. On peut facilement exhiber un rangement de coût 4 : il suffit de prendre $f(1) = f(4) = 1$, $f(2) = f(5) = 2$, $f(3) = f(7) = 3$ et $f(6) = 4$. Ceci montre que $\omega(X; c) = 4$.

Étude du rangement séquentiel

Question 15 • Le rangement f obtenu lorsque l'on applique la stratégie de rangement séquentiel à l'entrée $(X; c)$ décrite par $X = (60, 50, 15, 30, 45, 90, 75)$ et $c = 100$, est défini par $f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = f(4) = 2$, $f(5) = 3$, $f(6) = 4$ et $f(7) = 5$. On remarque que ce rangement n'est pas optimal. La figure 1 représente le résultat obtenu.

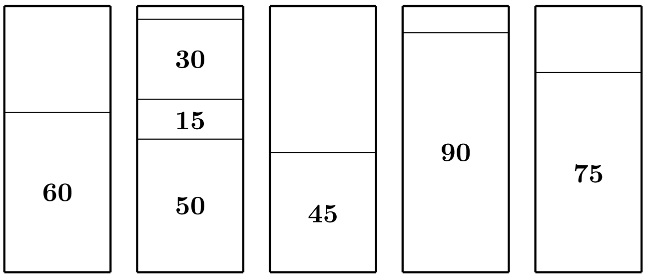

Figure 1: stratégie de rangement séquentiel

Question 16 • La fonction `aux` place l'objet courant dans le conteneur courant si le volume disponible le permet, sinon elle le place dans le conteneur suivant. La liste résultat est construite ≪à l'envers≫ : la valeur de $f(j+1)$ est placée en tête de la liste $\big(f(j), f(j-1), \ldots, f(1)\big)$. Ceci explique la nécessité de `rev`.

```
let next_fit x c =
 let rec aux dispo n accu = function
  | [] -> rev accu
  | t::q when t <= dispo -> aux (dispo-t) n (n::accu) q
  | t::q -> aux (c-t) (n+1) ((n+1)::accu) q
 in aux c 1 [] x;;
```

Question 17 • Pour $k \in [\![1, m]\!]$, notons i_k l'indice du dernier objet rangé dans le conteneur numéro k ; on a donc $f(i_k) = k$, et $f(i_k + 1) = k + 1$ (sauf pour $k = m$). Envisageons trois cas de figure :

- comme l'objet d'indice $i_1 + 1$ n'a pu être logé dans le conteneur numéro 1, on a l'inégalité $c < \displaystyle\sum_{1 \leqslant j \leqslant i_1+1} X_j$;
- pour $2 \leqslant k < m$, l'objet d'indice $i_k + 1$ n'a pu être logé dans le conteneur numéro k ; on en déduit $c < \displaystyle\sum_{i_{k-1} < j \leqslant i_k+1} X_j$;
- enfin, on a la majoration banale $c < c + \displaystyle\sum_{i_{m-1}+1 \leqslant j \leqslant i_m} X_j$.

Sommons ces m inégalités : à gauche, on trouve m ; à droite, X_j apparaît deux fois si $j \in \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, une seule fois dans le cas contraire. D'où la majoration $m < c + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} X_j$, soit $cC_{rs}(X;c) < c + 2\pi(X)$, d'où $C_{rs}(X;c) < 1 + 2\dfrac{\pi(X)}{c}$. De la définition de la fonction «partie entière supérieure» il résulte alors que $C_{rs}(X;c) \leqslant \left\lceil 2\dfrac{\pi(X)}{c} \right\rceil$. Notons que l'on a l'égalité avec l'entrée $X_1 = 1/2$.

Question 18 • Soit $c > 0$ (quelconque). Soient $\alpha > 0$ et $q \geqslant 1$ (à définir). Pour $1 \leqslant k < q$, notons $X_{2k-1} = c/2 + (k+1)\alpha$ et $X_{2k} = c/2 - k\alpha$. Notons $X = (X_i)_{1 \leqslant i \leqslant 2q}$. Montrons que l'entrée $(X;c)$ répond à la question, pour peu que $2q \geqslant n$.

• Comme $X_{2k-1} + X_{2k} = c + \alpha > c$ et $X_{2k} + X_{2k+1} = c + 2\alpha > c$, le rangement séquentiel nécessitera $2q$ conteneurs : $C_{rs}(X;c) = 2q$.

• Par ailleurs, on note que $X_{2k-1} + X_{2k+2} = c$ pour $k \in [\![1, q-1]\!]$; on peut donc loger tous les objets, à l'exception de X_2 et X_{2q-1}, en utilisant $q - 1$ conteneurs (tous remplis à 100%). Les deux objets qui restent ont alors un volume total de $c/2 - \alpha + c/2 + (q+1)\alpha = c + q\alpha > c$, et nécessitent donc deux conteneurs pour être logés. On exhibe ainsi un rangement de coût $q + 1$, qui est clairement optimal puisque $\pi(X) > qc$.

• Pour réaliser l'inégalité demandée, il suffit donc de choisir α et q tels que $\dfrac{C_{rs}(X;c)}{\omega(X;c)} > 2 - \varepsilon$, $X_{2q-1} < c$, $X_{2q} > 0$ et $2q \geqslant n$. La première condition s'écrit $\dfrac{2q}{q+1} > 2 - \varepsilon$, ou encore $\varepsilon > \dfrac{2}{q+1}$, soit $q + 1 > \dfrac{2}{\varepsilon}$, donc $q \geqslant \lfloor 2/\varepsilon \rfloor$; pour satisfaire aussi la condition $2q \geqslant n$, on prendra donc $q = \max\big(\lfloor 2/\varepsilon \rfloor, \lceil n/2 \rceil\big)$. Les deux autres conditions s'écrivent $c/2 + (q+1)\alpha < c$ et $c/2 - q\alpha > 0$: $\alpha = \dfrac{c}{2(q+2)}$ répond à la question.

Étude de la stratégie *first fit*

Question 19 • Observons un rangement qui laisse deux conteneurs remplis à 50% au plus : on aurait pu placer le contenu du deuxième dans l'espace libre du premier ; ce rangement n'a donc pas pu être obtenu par application de la stratégie *first fit*.

Question 20 • Appliquée à l'entrée décrite par $X = (60, 50, 15, 30, 45, 90, 75)$ et $c = 100$, la stratégie *first fit* donne le rangement f défini par $f(1) = f(3) = 1$, $f(2) = f(4) = 2$, $f(5) = 3$, $f(6) = 4$ et $f(7) = 5$; la figure 2 représente ce rangement. On remarque qu'il n'est pas optimal.

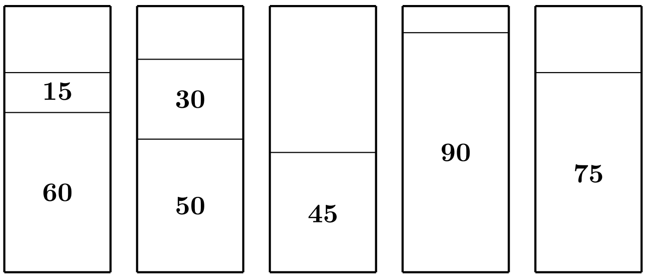

Figure 2: stratégie *first fit*

Question 21 • Le programme, plus compliqué que celui écrit plus haut pour la stratégie de rangement séquentiel, demande quelques explications préalables :

- le vecteur `disponible` indique, pour chaque conteneur, l'espace libre restant ;
- dans le vecteur `rangement`, on note les numéros des conteneurs dans lesquels on loge les objets ;
- la fonction `premier_conteneur_suffisant` détermine le numéro du conteneur dans lequel sera logé un objet ;
- `aux` applique répétitivement cette fonction ; `j` est le numéro de l'objet à ranger ;

• on termine le travail en transformant en liste le vecteur `rangement`.

```
let first_fit c x =
 let n = list_length x in
 let disponible = make_vect n c
 and rangement = make_vect n (-1) in
 let rec premier_conteneur_suffisant depuis = function
  | v when v <= disponible.(depuis) -> depuis
  | v -> premier_conteneur_suffisant (depuis+1) v in
 let rec aux j = function
  | [] -> list_of_vect rangement
  | t::q -> let i = premier_conteneur_suffisant 0 t in
     rangement.(j) <- i+1;
     disponible.(i) <- disponible.(i) - t;
     aux (j+1) q
 in aux 0 x;;
```

Question 22 • L'entrée $X_1 = X_2 = X_3 = 0.25 + \varepsilon$, $X_4 = X_5 = X_6 = 0.25 - 2\varepsilon$, $X_7 = X_8 = X_9 = 0.5 + \varepsilon$ répond à la question : avec la stratégie *first fit*, on utilisera cinq conteneurs : $f(1) = f(2) = f(3) = 1$, $f(4) = f(5) = f(6) = 2$, $f(7) = 3$, $f(8) = 4$ et $f(9) = 5$; en revanche, le rangement g défini par $g(1) = g(4) = g(7) = 1$, $g(2) = g(5) = g(8) = 2$ et $g(3) = g(6) = g(9) = 3$ est optimal puisque les trois conteneurs sont remplis à 100%.

Question 23 • La stratégie de placement séquentiel fonctionne «en ligne» : le délai de rangement d'un objet est constant, et il n'est pas nécessaire de disposer d'espace mémoire pour noter les conteneurs partiellement remplis, et non encore refermés. Dans l'analogie avec le manutentionnaire, celui-ci n'a pas besoin de courir le long du train : si le conteneur courant n'offre pas assez de place, il le referme, et demande au conducteur de faire avancer le train de la longueur d'un wagon.

Analyse de la stratégie *first fit* avec une entrée décroissante

Question 24 • Le rangement f obtenu lorsque l'on applique la stratégie *first fit* à l'entrée décrite par $\widehat{X} = (90, 75, 60, 50, 45, 30, 15)$ et $c = 100$, est défini par $f(1) = 1$, $f(2) = f(7) = 2$, $f(3) = f(6) = 3$ et $f(4) = f(5) = 4$. Remarquons que ce rangement est optimal. La figure 3 représente le résultat obtenu.

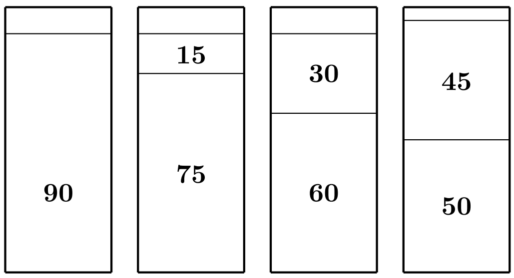

Figure 3: stratégie *first fit*, entrée décroissante

Question 25 • Raisonnons par l'absurde : supposons que l'un des conteneurs supplémentaires contienne un objet de taille strictement supérieure à $c/3$, et mettons en évidence une contradiction. On ne restreint pas la généralité en supposant que cet objet est celui qui a causé l'allocation du premier conteneur supplémentaire ; donc, si q est son indice, les objets d'indice 1 à $q-1$ inclus sont tous logés dans les m premiers conteneurs, et sont tous de taille strictement supérieure à $c/3$; donc, chacun des m premiers conteneurs contient exactement un ou deux objets.

• En fait, les conteneurs ne contenant qu'un objet (s'il en existe) précèdent les conteneurs contenant deux objets (s'il en existe) : pour le voir, supposons qu'il existe deux conteneurs d'indices i et $j > i$, le premier contenant deux objets X_r et X_s, le second contenant un objet X_t avec $r < t < q$. Nous avons certainement $X_t \leqslant X_r$ et $X_q \leqslant X_s$; mais $X_r + X_s \leqslant c$, donc $X_t + X_q \leqslant c$: l'objet d'indice q aurait pu être placé dans le conteneur numéro j.

• Notons α le nombre de conteneurs ne contenant qu'un objet, et $\beta = m-\alpha$. Les objets logés dans les α premiers conteneurs sont tous de taille strictement supérieure à $c/2$. Les objets logés dans les β conteneurs suivants ont une taille comprise entre $c/2$ inclus et $c/3$ exclu. Il est clair alors qu'aucun rangement des objets d'indice 1 à q inclus ne peut se faire dans m conteneurs de taille c : en effet, les α objets de taille strictement supérieure à $c/2$ exigent chacun un conteneur ; et aucun conteneur ne peut accueillir plus de deux des $\beta+1$ autres objets. Nous avons ainsi mis en évidence une contradiction.

Question 26 • Supposons que les conteneurs supplémentaires contiennent chacun m objets au moins ; notons $y_1,\dots,y_m$ les m premiers. Aucun d'eux ne pouvait être logé dans l'un des m premiers conteneurs ; si nous notons v_i le volume accueilli dans le i-ième conteneur, nous avons $y_i+v_i > c$ pour $i \in [\![1,m]\!]$. Par sommation, il vient $\sum_{1\leqslant i\leqslant m} y_i + \sum_{1\leqslant i\leqslant m} v_i > mc$; mais le membre de gauche est au plus égal à $\pi(X)$. Mais alors $\pi(X) > c\omega(X;c)$, ce qui contredit le résultat de la question 5.
Remarque : nous en déduisons immédiatement $C_{ff}(X;c) < 2\omega(X;c)$.

Question 27 • Si $C_{ff}(X;c) = m$, la majoration est banale. Nous supposons désormais $C_{ff}(X;c) > m$.
• Les conteneurs d'indice supérieur à m contiennent au plus $m-1$ objets, tous de volume $1/3$ au plus ; la stratégie *first fit* utilisera donc au plus $\lceil (m-1)/3 \rceil$ conteneurs pour les loger. En comptant les m premiers conteneurs, nous obtenons $C_{ff}(X;c) \leqslant m + \left\lceil \frac{m-1}{3} \right\rceil$. Distinguons trois cas selon le reste de m modulo 3 :

- $m = 3k$: $m + \left\lceil \frac{m-1}{3} \right\rceil = 3k + \left\lceil \frac{3k-1}{3} \right\rceil = 4k$;
  or $\frac{4m+1}{3} = \frac{12k+1}{3} = 4k + \frac{1}{3} > 4k$;
- $m = 3k+1$: $m + \left\lceil \frac{m-1}{3} \right\rceil = 3k+1 + \left\lceil \frac{3k}{3} \right\rceil = 4k+1$;
  or $\frac{4m+1}{3} = \frac{12k+5}{3} = 4k + \frac{5}{3} > 4k+1$;
- $m = 3k+2$: $m + \left\lceil \frac{m-1}{3} \right\rceil = 3k+2 + \left\lceil \frac{3k+1}{3} \right\rceil = 4k+3$;
  or $\frac{4m+1}{3} = \frac{12k+9}{3} = 4k+3$.

Dans tous les cas de figure, nous avons bien $C_{ff}(X;c) \leqslant \frac{4m+1}{3}$.
• Dans le cas $m=1$, tous les objets peuvent être logés dans un seul conteneur, donc $C_{ff}(X;c) = 1$.

Question 28 • L'entrée décroissante $X_1 = X_2 = 0.41$, $X_3 = X_4 = 0.39$, $X_5 = X_6 = 0.2$ répond à la question. En effet, la stratégie *first fit* donne le rangement $f(1) = f(2) = 1$, $f(3) = f(4) = f(5) = 2$ et $f(6) = 3$. En revanche, le rangement g défini par $g(1) = g(3) = g(5) = 1$ et $g(2) = g(4) = g(6)$ est optimal puisque les trois conteneurs sont remplis à 100%.

Question 29 • Soient $n \in \mathbb{N}^*$; notons $\varepsilon = \frac{1}{4n(4n+1)}$. L'entrée décroissante de longueur $4n+2$ définie par $X_i = \frac{2}{4n+1} + \varepsilon$ pour $1 \leqslant i \leqslant 2n$, $X_i = \frac{2}{4n+1} - \varepsilon$ pour $2n+1 \leqslant i \leqslant 4n$ et $X_{4n+1} = X_{4n+2} = \frac{1}{4n+1}$ répond à la question. Le choix de ε assure $0 < X_i < 1$ pour tout indice $i \in [\![1, 4n+2]\!]$. La stratégie *first fit* donne le rangement f défini par $f(i) = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant 2n$, $f(i) = 2$ pour $2n+1 \leqslant i \leqslant 4n$ et $f(4n+1) = f(4n+2) = 3$. En revanche, le rangement g défini par $g(2i-1) = 1$ et $g(2i) = 2$ pour $1 \leqslant i \leqslant 2n$, $g(4n+1) = 1$ et $g(4n+2) = 2$ est optimal

Question 30 • Nous allons séparément minorer $\omega(H^{(n)};1)$ et majorer γ_n.
• À la question 25, nous avons noté que $\pi(X) \leqslant c\omega(X;c)$; nous en déduisons

$$\omega(H^{(n)};1) \geqslant \pi(H^{(n)}) = \sum_{2\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{2\leqslant k\leqslant n} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \geqslant \int_2^{n+1} \frac{dt}{t} = \ln \frac{n+1}{2}$$

• Pour $1 \leqslant k \leqslant \gamma_n$, notons i_k l'indice du premier objet placé dans le conteneur numéro k. Nous avons donc $i_1 = 1$, et $i_2 = 3$ (sous réserve que $n \geqslant 3$, sinon i_2 n'est pas défini) puisque $1/2 + 1/3 \leqslant 1 < 1/2 + 1/3 + 1/4$. Le conteneur d'indice γ_n contient au moins un objet, de volume au moins égal à $1/n$; donc, dans chacun des conteneurs précédents, le volume disponible est strictement inférieur à $1/n$. Ceci permet d'écrire la majoration suivante, pour $1 \leqslant k < \gamma_n$:

$$1 < \frac{1}{n} + \sum_{i_k \leqslant j < i_{k+1}} \frac{1}{j}$$

Sommons ces $\gamma_n - 1$ inégalités ; il vient :

$$\gamma_n - 1 < \frac{\gamma_n - 1}{n} + \sum_{1 \leqslant k < \gamma_n} \Big(\sum_{i_k \leqslant j < i_{k+1}} \frac{1}{j} \Big) = \frac{\gamma_n - 1}{n} + \sum_{2 \leqslant j < i_n} \frac{1}{j} \leqslant \frac{\gamma_n - 1}{n} + \sum_{2 \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{j}$$

Avec la majoration bien connue $\displaystyle\sum_{2 \leqslant j \leqslant n} \frac{1}{j} \leqslant \ln(n)$, il vient $\Big(1 - \dfrac{1}{n}\Big)(\gamma_n - 1) \leqslant \ln(n)$, soit $\gamma_n < 1 + \dfrac{n}{n-1} \ln(n)$.

• Rassemblons ces résultats :

$$\begin{aligned}
\gamma_n - \omega(H^{(n)}; 1) &\leqslant 1 + \frac{n}{n-1} \ln(n) - \ln\Big(\frac{n+2}{2}\Big) \\
&= 1 + \Big(1 + \frac{1}{n-1}\Big) \ln(n) - \ln(n) - \ln\Big(\frac{n+2}{2n}\Big) \\
&= 1 + \frac{\ln(n)}{n-1} - \ln\Big(\frac{n+2}{2n}\Big)
\end{aligned}$$

Le majorant obtenu est le terme général d'une suite qui converge vers 1, ce qui termine la preuve. Nous pouvons d'ailleurs expliciter un majorant : $\dfrac{\ln(n)}{n-1} \leqslant 1$ est bien connu, et $\dfrac{n+2}{2n} \geqslant \dfrac{1}{2}$, donc $-\ln\Big(\dfrac{n+2}{2n}\Big) \leqslant \ln 2 < 1$. Ainsi, $\gamma_n - \omega(H^{(n)}; 1) < 3$ pour tout $n \geqslant 2$.

Références bibliographiques

▶ Beaucoup de questions de ce sujet proviennent des deux manuels suivants : *Computer algorithms*, de Sara Baase ; et *Introduction to algorithms*, d'Udi Manber (tous deux édités par Addison-Wesley). On consultera également avec profit le livre de Michael Garey et David Johnson, *Computers and intractability* (éd. W. H. Freeman).

▶ David Johnson, A. Demers, Jeffrey Ullman, Michael Garey et Ron Graham ont prouvé que la stratégie *first fit* vérifie :

$$C_{ff}(X; c) \leqslant \frac{17}{10} \omega(X; c) + 2$$

Le facteur 17/10 de cette majoration ne peut être diminué. Référence : *Worst case performance bounds for simple one-dimensional packing algorithms*, SIAM J. Comput. 3, 299-325.

▶ Dans sa thèse, David Johnson donne, pour une entrée décroissante soumise à la stratégie *first fit* :

$$C_{ff}(X; c) \leqslant \frac{11}{9} \omega(X; c) + 4$$

Ici encore, le facteur qui intervient est optimal.

▶ Dans la stratégie *best fit*, on regarde si l'un au moins des conteneurs déjà alloués peut accueillir le prochain objet à loger ; si c'est le cas, on en choisit un qui minimise l'espace restant après rangement de l'objet. Sinon, on alloue un nouveau conteneur. On pourrait penser que cette stratégie offre de meilleurs résultats que *first fit* : l'article précité montre qu'il n'en est rien.

▶ En 1981, W. Fernandez de la Vega et G. S. Lueker ont montré que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un algorithme $\mathcal{A}$ de coût linéaire (par rapport au nombre de boîtes à ranger) réalisant la majoration :

$$C_{\mathcal{A}}(X; c) \leqslant (1 + \varepsilon) \omega(X; c) + K_\varepsilon$$

où $C_{\mathcal{A}}(X; c)$ désigne le coût du rangement obtenu par application de l'algorithme $\mathcal{A}$ à l'entrée $(X; c)$ et K_ε ne dépend que de ε ; notons toutefois que la constante K_ε a le mauvais goût d'être exponentielle en $1/\varepsilon$. Référence : *Combinatorica* **1** (1981), 349-355.

▶ C. U. Martel a proposé en 1985 une stratégie répartissant les boîtes à ranger en cinq catégories ; le coût du prétraitement est un $\mathcal{O}(n)$. Notant $C_{martel}(X;c)$ le coût du rangement obtenu par application de sa stratégie à l'entrée $(X;c)$, on a :

$$C_{martel}(X;c) \leqslant \frac{4}{3}\omega(X;c) + 2$$

Référence : *Oper. Res. Lett.* **4** (1985), 189-192.

▶ En 1998, József Békési et Gábor Galambos ont présenté une amélioration de la méthode de Martel, consistant à répartir les boîtes en huit catégories (le coût du prétraitement restant linéaire). Notant $C_{bg}(X;c)$ le coût du rangement obtenu par application de leur stratégie à l'entrée $(X;c)$, on a :

$$C_{bg}(X;c) \leqslant \frac{5}{4}\omega(X;c) + 3$$

Référence : *Journal of Computer and System Science* **60** (2000), 145-160.

▶ Il est intéressant de noter que l'article de Békési et Galambos s'étend sur quatorze pages, alors que celui de Martel n'en couvre que quatre. Les deux premiers auteurs indiquent d'ailleurs, dans leurs conclusions :

> This improvement may indicate that one can refine the classification in order to get a 6/5 or even a better worst-case ratio. But this idea is already questionable : we think that theoretically the algorithm remains linear (like the Fernandez de la Vega and Lueker algorithm) but it may become more complicated, and probably the proof will grow exponentially because of the huge number of subcases.

▶ Un farceur avait suggéré le titre *Piles de boîtes.*

▶ Cet énoncé a été soumis à la sagacité des étudiants le mardi 25 janvier 2000.

FIN