Option Informatique en Spé MP et MP*

Devoir surveillé du mardi 25 janvier 2000

Rangements de boîtes

Résumé

Le problème du rangement de boîtes (*bin packing*) est un des classiques de l'optimisation combinatoire. Dans ce problème, on veut ranger un ensemble de boîtes, de volumes variés, dans des conteneurs ayant tous le même volume.

On se propose d'étudier diverses propriétés du rangement optimal. L'obtention d'un tel rangement optimal constitue un problème NP-complet.

On analyse ensuite diverses stratégies (ou *heuristiques*) donnant un résultat pas trop éloigné de l'optimum : rangement séquentiel, puis stratégie *first fit*. Le cas où cette dernière stratégie est appliquée à une entrée décroissante fait l'objet d'une étude particulière.

Les parties 1 et 2 s'inspirent d'un sujet de l'option *Mathématiques de l'Informatique* de l'Agrégation de Mathématiques (session de 1987). Plusieurs questions complémentaires proviennent des manuels d'informatique de Sara Baase et d'Udi Manber (publiés tous deux par Addison-Wesley).

Veuillez rédiger chaque partie sur une copie séparée.

Table des matières

Définitions et notations

▶ On s'intéresse au problème suivant : on dispose de *conteneurs*, tous de même capacité $c > 0$, dans lesquels on souhaite ranger des *objets* de volumes respectifs $X_1, X_2, \dots, X_n$, lequels appartiennent tous à l'intervalle $]0, c]$. Notant $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, le couple $(X; c)$ est une *entrée* du problème.

▶ Soit m un naturel non nul. Une application $f : [\![1, n]\!] \mapsto [\![1, m]\!]$ est un *rangement* de l'entrée $(X; c)$ si elle est surjective et vérifie, pour tout $i \in [\![1, m]\!]$:

$$\sum_{j \in \Omega_i} X_j \leqslant c$$

où $\Omega_i = f^{-1}\big(\{i\}\big)$. Avec le rangement f, l'objet numéro j est placé dans le conteneur numéro $f(j)$. La surjectivité de f traduit le fait qu'aucun conteneur n'est vide ; la deuxième condition traduit le fait qu'aucun conteneur ne déborde (le volume total des objets placés dans un conteneur est au plus égal au volume de ce dernier).

▶ Le nombre m de conteneurs requis pour le rangement f est noté $\|f\|$, c'est le *coût* de ce rangement. On note $\pi(X) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} X_i$ le volume total des objets à ranger.

1 Questions préliminaires

Question 1 • Montrez que le problème étudié se pose effectivement à qui utilise un ordinateur ; vous préciserez ce que sont alors les objets et les conteneurs.

Question 2 • Montrez qu'il existe au moins un rangement de l'entrée $(X; c)$, et que l'ensemble des rangements de $(X; c)$ est fini ; donnez un majorant du cardinal de cet ensemble.

2 Propriétés d'un rangement optimal

Question 3 • Montrez que, parmi tous les rangements possibles de l'entrée $(X; c)$, il en existe au moins un de coût minimal. On notera désormais

$$\omega(X; c) = \min\big\{\|f\|\big\}$$

où f parcourt l'ensemble des rangements de $(X; c)$. Un rangement f de $(X; c)$ tel que $\|f\| = \omega(X; c)$ sera dit *optimal*.

Question 4 • Combien vaut $\omega(X; c)$ lorsque $\pi(X) \leqslant c$?

Question 5 • Établissez la majoration $\dfrac{\pi(X)}{c} \leqslant \omega(X; c)$.

Question 6 • Soit $\lambda > 0$; montrez que

$$\omega\big((\lambda X_1, \lambda X_2, \dots, \lambda X_n); \lambda c\big) = \omega\big((X_1, X_2, \dots, X_n); c\big)$$

▶ Dans la suite, $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ est une autre famille de réels, appartenant tous à $]0, c]$.

Question 7 • On suppose $X_i \leqslant Y_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Établissez la majoration $\omega(X; c) \leqslant \omega(Y; c)$.

Question 8 • Montrez que

$$\omega\big((X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n); 2c\big) \leqslant \max\big(\omega(X; c), \omega(Y; c)\big)$$

Question 9 • On suppose $X_i + Y_i \leqslant c$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Déterminez le signe de la quantité :

$$\omega\big((X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \dots, X_n + Y_n); c\big) - \omega\big((X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_n); c\big)$$

Question 10 • On suppose $\pi(X) > c$. Prouvez que $\omega(X; c) < 2\dfrac{\pi(X)}{c}$.

Question 11 • Déterminez $\omega(X; 100)$ avec $X = (60, 50, 15, 30, 45, 90, 75)$.

► On se propose de prouver qu'il n'est pas toujours avantageux de remplir complètement un conteneur. On fixe $c = 1$.

Question 12 • Construisez, pour $n \geqslant 6$, une suite $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de réels appartenant tous à $]0, 1[$, vérifiant les deux conditions suivantes :

- **C1** : $X_1 + X_2 + X_3 = 1$
- **C2** : $\omega\big((X_1, X_2, \ldots, X_n); 1\big) < 1 + \omega\big((X_4, X_5, \ldots, X_n); 1\big)$

Question 13 • Construisez une suite vérifiant de plus la condition

- **C3** : pour toute partie I de $[\![1, n]\!]$ distincte de $\{1, 2, 3\}$, on a $\sum\limits_{i \in I} X_i \neq 1$

3 Analyse de la stratégie de rangement séquentiel (*next fit*)

► La stratégie de rangement séquentiel (*next fit*) consiste à loger des objets de numéros consécutifs dans le conteneur courant, tant que ceci est possible. Si l'espace disponible n'est pas suffisant pour l'objet courant, on «referme» le conteneur, et on alloue un nouveau conteneur. Formellement, si $\big((X_1, X_2, \ldots, X_n); c\big)$ est l'entrée à ranger, le premier conteneur accueillera les objets X_1 à X_k, où k est le plus grand indice $j \in [\![1, n]\!]$ tel que $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j} X_i \leqslant c$. Si $k < n$, les objets qui restent seront rangés dans des conteneurs supplémentaires, selon la même stratégie.

► On notera $C_{rs}(X; c)$ le coût du rangement obtenu par application de la stratégie de rangement séquentiel à l'entrée $(X; c)$.

Question 14 • Quel résultat obtenez-vous en appliquant la stratégie de rangement séquentiel à l'exemple de Q11 ?

Question 15 • Rédigez en Caml une fonction :

```
next_fit : int -> int list -> int list
```

spécifiée comme suit : `next_fit c x` calcule un rangement de l'entrée $(X; c)$ en appliquant la stratégie de rangement séquentiel.

Question 16 • Prouvez la majoration $C_{rs}(X; c) \leqslant \left\lceil 2\dfrac{\pi(X)}{c} \right\rceil$.

Question 17 • Soit $\varepsilon > 0$, $c > 0$ et $n \geqslant 1$. Construisez une suite $(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ d'éléments de $]0, c]$ telle que $p \geqslant n$ et $\dfrac{C_{rs}(X; c)}{\omega(X; c)} > 2 - \varepsilon$.

4 Analyse de la stratégie *first fit*

► La stratégie *first fit* consiste à loger chaque objet dans le conteneur de plus petit numéro susceptible de l'accueillir ; à défaut, on alloue un nouveau conteneur. Voici une description imagée de cette stratégie : les objets arrivent entre les mains d'un manutentionnaire, en tête d'un train dont chaque wagon porte un conteneur ; le manutentionnaire se dirige vers la queue du train en inspectant les wagons, à la recherche du premier conteneur offrant une place suffisante ; il y loge l'objet, puis retourne à la tête du train. Lorsque tous les objets ont été chargés, il repart vers la queue du train, et, au besoin, sépare le dernier wagon ayant reçu un objet du premier wagon n'en ayant reçu aucun.

► On notera $C_{ff}(X; c)$ le coût du rangement obtenu par application de la stratégie *first fit* à l'entrée $(X; c)$.

Question 18 • Montrez qu'avec cette stratégie, tous les conteneurs (sauf peut-être un) sont remplis à plus de 50%.

Question 19 • Quel résultat obtenez-vous en appliquant la stratégie *first fit* à l'exemple de Q11 ?

Question 20 • Rédigez en Caml une fonction :

```
first_fit : int -> int list -> int list
```

spécifiée comme suit : `first_fit c x` calcule un rangement de l'entrée $(X;c)$ en appliquant la stratégie *first fit*.

Question 21 • Construisez une entrée $(X;c)$ telle que $\dfrac{C_{ff}(X;c)}{\omega(X;c)} = \dfrac{5}{3}$.

Question 22 • La stratégie de rangement séquentiel présente sur la stratégie *first fit* un avantage notable. Quel est-il, selon vous ?

5 Analyse de la stratégie *first fit* avec une entrée décroissante

▶ Nous dirons qu'une entrée $(X;c)$ est *décroissante* lorsque $X_1 \geqslant X_2 \geqslant \ldots \geqslant X_n$. On analyse dans cette partie la qualité du rangement obtenu lorsque la stratégie *first fit* est appliquée à une telle entrée.

Question 23 • On note $(\widehat{X};c)$ l'entrée déduite de celle donnée à la question 11, en triant les objets par taille décroissante :

$$\widehat{X} = (90, 75, 60, 50, 45, 30, 15)$$

Quel résultat obtenez-vous en appliquant la stratégie *first fit*, lorsqu'on l'applique à $(\widehat{X};c)$.

▶ Soit $(X;c)$ une entrée décroissante pour laquelle un rangement optimal requiert m conteneurs. Nous allons établir une majoration du nombre de conteneurs supplémentaires nécessaires lorsque l'on applique la stratégie *first fit*. On suppose donc $C_{ff}(X;c) > m$.

Question 24 • Montrez que les conteneurs d'indice supérieur à m ne contiennent que des objets de volume au plus égal à $c/3$.

Question 25 • Montrez que ces conteneurs contiennent moins de m objets.

Question 26 • Pour $m \geqslant 2$, montrez que $C_{ff}(X;c) \leqslant \dfrac{4m+1}{3}$. Qu'en est-il du cas $m = 1$?

Question 27 • Construisez une entrée décroissante $(X;c)$ vérifiant $\omega(X;c) = 2$ et $C_{ff}(X;c) = 3$.

Question 28 • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Construisez une entrée décroissante $(X;c)$ vérifiant $\omega(X;c) = 2$ et $C_{ff}(X;c) = 3$, et telle que la longueur de X soit au moins égale à n.

▶ Soit $n \geqslant 2$. On note $H^{(n)} = \left(\dfrac{1}{k}\right)_{2 \leqslant k \leqslant n}$, et $\gamma_n = C_{rs}(H^{(n)};1)$ le coût du rangement obtenu par application de la stratégie *first fit* à l'entrée décroissante $(H^{(n)};1)$.

Question 29 • Montrez que la suite de terme général $\gamma_n - \omega(H^{(n)};1)$ est bornée.

FIN