Option Informatique en Spé MP et MP*

Devoir surveillé du mercredi 27 octobre 1999

Pavages, périodicité et quasi-périodicité
(d'après Bruno Durand)

Résumé

On étudie dans ce texte quelques notions relatives aux pavages du plan au moyen de tuiles carrées de côté 1. On présente en particulier les *pavages de Wang*.

On introduit ensuite la notion de motif régulier, qui permet de définir les pavages *quasi-périodiques* ; on définit alors deux fonctions qui mesurent chacune, d'une certaine manière, la plus ou moins grande complexité du pavage.

Veuillez rédiger chaque partie sur une copie séparée.

Table des matières

Définitions et notations

▶ Un *catalogue* est un ensemble fini non vide.

▶ Un *pavage* du plan est une application de $\mathbb{Z}^2$ dans un catalogue c, dont les éléments seront appelés *tuiles*. Soit p un tel pavage ; nous dirons que la tuile $p(i,j)$ couvre le carré $[i,i+1]\times[j,j+1]$.

▶ Un *motif* de côté n est une application m de $[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]$ dans c. Ce motif *apparaît* dans le pavage p s'il existe $(i,j)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $m(x,y)=p(i+x-1,j+y-1)$ pour tout $(x,y)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]$. On note $\mathcal{M}_p(n)$ l'ensemble des motifs de côté n qui apparaissent dans le pavage p. En particulier, l'ensemble $\mathcal{M}_p(1)$ des motifs de côté 1 se confond avec $p(\mathbb{Z}^2)$.

▶ Soient p un pavage du plan, et $(x,y)\in\mathbb{Z}^2$ distinct de $(0,0)$. Nous dirons que (x,y) est une *période* de p si $p(i+x,j+y)=p(i,j)$ quel que soit $(i,j)\in\mathbb{Z}^2$.

▶ Un pavage p est *périodique* s'il existe des naturels non nuls x et y tels que $(x,0)$ et $(0,y)$ soient des périodes de p.

▶ Nous utiliserons à plusieurs reprises le pavage π défini par $\pi(0,0)=1$ et $\pi(i,j)=0$ pour tout autre couple (i,j).

1 Pavages de Wang

▶ Une *tuile de Wang* est un carré de côté 1, dont chaque côté est peint d'une couleur ; on notera $g(t)$, $d(t)$, $h(t)$ et $b(t)$ les couleurs des quatre côtés d'une telle tuile. Dans la suite, les couleurs seront représentées par des nombres[1].

▶ Un *pavage de Wang* est un pavage du plan formé avec des tuiles prises dans un catalogue de tuiles de Wang, et vérifiant la condition de compatibilité suivante :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{Z}^2 : d\big(p(i,j)\big)=g\big(p(i+1,j)\big) \quad \text{et} \quad h\big(p(i,j)\big)=b\big(p(i,j+1)\big)$$

En clair, lorsque deux tuiles sont adjacentes, les côtés en contact sont peints d'une même couleur.

Question 1 Montrez que le catalogue de tuiles de Wang suivant permet de paver le plan :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & 8 & \\ 2 & & 3 \\ & 9 & \end{array}}\quad \boxed{\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 6 & & 4 \\ & 1 & \end{array}}\quad \boxed{\begin{array}{ccc} & 4 & \\ 1 & & 2 \\ & 5 & \end{array}}\quad \boxed{\begin{array}{ccc} & 5 & \\ 4 & & 5 \\ & 4 & \end{array}}\quad \boxed{\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 3 & & 1 \\ & 2 & \end{array}}\quad \boxed{\begin{array}{ccc} & 9 & \\ 5 & & 6 \\ & 8 & \end{array}}$$

Question 2 Montrez que le catalogue de tuiles de Wang suivant ne permet pas de paver le plan :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 2 & & 3 \\ & 2 & \end{array}}\quad \boxed{\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 2 \\ & 1 & \end{array}}\quad \boxed{\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 3 & & 1 \\ & 2 & \end{array}}$$

Question 3 Soit c un catalogue de tuiles de Wang. On suppose que c permet de réaliser un pavage admettant une période de la forme $(x,0)$. Montrez que c permet de réaliser un pavage périodique.

Question 4 Soit c un catalogue de tuiles de Wang. On suppose que c permet de réaliser au moins un pavage périodique. Décrire un algorithme construisant un tel pavage.

Question 5 $\star\star\star$ Soit c un catalogue de tuiles de Wang. On suppose que c permet de paver des carrés de côté n arbitrairement grand. Montrez que c permet de paver le plan entier.

2 Fonction de comptage des motifs d'un pavage

▶ Au pavage p on associe la fonction g_p de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ qui, au naturel non nul n, associe le nombre de motifs de côté n de p : $g_p(n)=\big|\mathcal{M}_p(n)\big|$. Nous dirons que g_p est la *fonction de comptage* du pavage p.

Question 6 Donnez un majorant de $g_p(n)$ en fonction de n et de $|c|$.

Question 7 Montrez que la fonction g_p est croissante.

Question 8 Explicitez g_π.

Question 9 Explicitez la fonction de comptage du pavage construit à la question 1.

[1] Ceci rend la duplication du sujet plus économique.

Question 10 Exhibez deux pavages p et q dont les fonctions de comptage vérifient respectivement $g_p(n) = n + 1$ et $g_q(n) = 2n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Question 11 $\star\star\star$ Caractérisez les pavages p dont la fonction de comptage est bornée.

Question 12 $\star\star\star$ Caractérisez les pavages p dont la fonction de comptage est constante.

3 Motifs critiques, quasi-périodicité

▶ Soit p un pavage du plan. Un motif m de ce pavage est *régulier* s'il existe un naturel non nul N tel que m apparaisse au moins une fois dans tout motif de côté N de p ; le plus petit naturel N non nul satisfaisant cette condition est le *rang* du motif m ; on le note $\rho_p(m)$.

▶ Un motif qui n'est pas régulier est dit *critique*. Un pavage sans motifs critiques est dit *quasi-périodique*.

Question 13 Montrez qu'un pavage périodique est quasi-périodique.

Question 14 Décrivez les motifs réguliers et les motifs critiques du pavage π.

▶ Soit p un pavage quasi-périodique du plan. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_p(n)$ le plus petit naturel non nul N tel que tout motif de côté N de p contienne au moins une occurrence de tout motif régulier de côté n de p. f_p est la *fonction de quasi-périodicité* du pavage.

Question 15 Justifiez la relation $f_p(n) = \max\{\rho_p(m) \mid m \in \mathcal{M}_p(n)\}$.

Question 16 Montrez que f_p est croissante.

Question 17 Montrez que f_p est *strictement* croissante.

Question 18 Justifiez la relation $g_p(n) \leqslant \big(f_p(n) - n + 1\big)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Question 19 $\star\star\star$ Montrez qu'un pavage p est périodique si et seulement si la suite de terme général $f_p(n) - n$ est stationnaire.

4 Relation d'extraction

▶ Soient p et q deux pavages du plan. Nous dirons que p est *extrait* de q, ce que nous noterons $p \prec q$, si tout motif apparaissant dans p apparaît aussi dans q. Clairement, $\prec$ est réflexive et transitive ; c'est donc une relation de préordre sur l'ensemble des pavages.

Question 20 Montrez que, si $p \prec q$, alors tout motif critique de p est aussi un motif critique de q.

Question 21 Soient p et q deux pavages du plan vérifiant $p \prec q$. Comparez $g_p(n)$ et $g_q(n)$. Comparez de même $f_p(n)$ et $f_q(n)$.

Question 22 Soit m un motif critique d'un pavage q. Montrez qu'il existe un pavage p extrait de q, mais dans lequel m n'apparaît pas.

Question 23 Un pavage p est dit *minimal* pour la relation $\prec$ si la relation $q \prec p$ implique $p \prec q$. Montrez que les pavages quasi-périodiques sont les pavages minimaux pour la relation $\prec$.

Question 24 $\star\star\star$ Soit c un catalogue de tuiles ; on suppose que c permet de paver le plan. Montrez que c permet de réaliser un pavage quasi-périodique du plan.

FIN