

# Option Informatique en Spé MP et MP\*

Devoir surveillé du mercredi 27 octobre 1999

Pavages, périodicité et quasi-périodicité  
(d'après Bruno Durand)

## Résumé

On étudie dans ce texte quelques notions relatives aux pavages du plan au moyen de tuiles carrées de côté 1. On présente en particulier les *pavages de Wang*.

On introduit ensuite la notion de motif régulier, qui permet de définir les pavages *quasi-périodiques* ; on définit alors deux fonctions qui mesurent chacune, d'une certaine manière, la plus ou moins grande complexité du pavage.

*Veillez rédiger chaque partie sur une copie séparée.*

## Table des matières

1	Pavages de Wang	2
2	Fonction de comptage des motifs d'un pavage	2
3	Motifs critiques, quasi-périodicité	3
4	Relation d'extraction	3

## Définitions et notations

- Un *catalogue* est un ensemble fini non vide.
- Un *pavage* du plan est une application de  $\mathbb{Z}^2$  dans un catalogue  $c$ , dont les éléments seront appelés *tuiles*. Soit  $p$  un tel pavage ; nous dirons que la tuile  $p(i, j)$  couvre le carré  $[i, i + 1] \times [j, j + 1]$ .
- Un *motif* de côté  $n$  est une application  $m$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$  dans  $c$ . Ce motif *apparaît* dans le pavage  $p$  s'il existe  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  tel que  $m(x, y) = p(i + x - 1, j + y - 1)$  pour tout  $(x, y) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ . On note  $\mathcal{M}_p(n)$  l'ensemble des motifs de côté  $n$  qui apparaissent dans le pavage  $p$ . En particulier, l'ensemble  $\mathcal{M}_p(1)$  des motifs de côté 1 se confond avec  $p(\mathbb{Z}^2)$ .
- Soient  $p$  un pavage du plan, et  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  distinct de  $(0, 0)$ . Nous dirons que  $(x, y)$  est une *période* de  $p$  si  $p(i + x, j + y) = p(i, j)$  quel que soit  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ .
- Un pavage  $p$  est *périodique* s'il existe des naturels non nuls  $x$  et  $y$  tels que  $(x, 0)$  et  $(0, y)$  soient des périodes de  $p$ .
- Nous utiliserons à plusieurs reprises le pavage  $\pi$  défini par  $\pi(0, 0) = 1$  et  $\pi(i, j) = 0$  pour tout autre couple  $(i, j)$ .

## 1 Pavages de Wang

- Une *tuile de Wang* est un carré de côté 1, dont chaque côté est peint d'une couleur ; on notera  $g(t)$ ,  $d(t)$ ,  $h(t)$  et  $b(t)$  les couleurs des quatre côtés d'une telle tuile. Dans la suite, les couleurs seront représentées par des nombres<sup>1</sup>.
- Un *pavage de Wang* est un pavage du plan formé avec des tuiles prises dans un catalogue de tuiles de Wang, et vérifiant la condition de compatibilité suivante :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{Z}^2 : d(p(i, j)) = g(p(i + 1, j)) \quad \text{et} \quad h(p(i, j)) = b(p(i, j + 1))$$

En clair, lorsque deux tuiles sont adjacentes, les côtés en contact sont peints d'une même couleur.

**Question 1** Montrez que le catalogue de tuiles de Wang suivant permet de paver le plan :

8 2 3 9	2 6 4 1	4 1 2 5	5 4 5 4	1 3 1 2	9 5 6 8
---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

**Question 2** Montrez que le catalogue de tuiles de Wang suivant ne permet pas de paver le plan :

2 2 3 2	1 1 2 1	1 3 1 2
---------------	---------------	---------------

**Question 3** Soit  $c$  un catalogue de tuiles de Wang. On suppose que  $c$  permet de réaliser un pavage admettant une période de la forme  $(x, 0)$ . Montrez que  $c$  permet de réaliser un pavage périodique.

**Question 4** Soit  $c$  un catalogue de tuiles de Wang. On suppose que  $c$  permet de réaliser au moins un pavage périodique. Décrivez un algorithme construisant un tel pavage.

**Question 5** \*\*\* Soit  $c$  un catalogue de tuiles de Wang. On suppose que  $c$  permet de paver des carrés de côté  $n$  arbitrairement grand. Montrez que  $c$  permet de paver le plan entier.

## 2 Fonction de comptage des motifs d'un pavage

► Au pavage  $p$  on associe la fonction  $g_p$  de  $\mathbb{N}^*$  dans  $\mathbb{N}$  qui, au naturel non nul  $n$ , associe le nombre de motifs de côté  $n$  de  $p$  :  $g_p(n) = |\mathcal{M}_p(n)|$ . Nous dirons que  $g_p$  est la *fonction de comptage* du pavage  $p$ .

**Question 6** Donnez un majorant de  $g_p(n)$  en fonction de  $n$  et de  $|c|$ .

**Question 7** Montrez que la fonction  $g_p$  est croissante.

**Question 8** Explicitez  $g_\pi$ .

**Question 9** Explicitez la fonction de comptage du pavage construit à la question 1.

<sup>1</sup>Ceci rend la duplication du sujet plus économique.

**Question 10** Exhibez deux pavages  $p$  et  $q$  dont les fonctions de comptage vérifient respectivement  $g_p(n) = n + 1$  et  $g_q(n) = 2n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Question 11** \*\*\* Caractérissez les pavages  $p$  dont la fonction de comptage est bornée.

**Question 12** \*\*\* Caractérissez les pavages  $p$  dont la fonction de comptage est constante.

### 3 Motifs critiques, quasi-périodicité

► Soit  $p$  un pavage du plan. Un motif  $m$  de ce pavage est *régulier* s'il existe un naturel non nul  $N$  tel que  $m$  apparaisse au moins une fois dans tout motif de côté  $N$  de  $p$ ; le plus petit naturel  $N$  non nul satisfaisant cette condition est le *rang* du motif  $m$ ; on le note  $\rho_p(m)$ .

► Un motif qui n'est pas régulier est dit *critique*. Un pavage sans motifs critiques est dit *quasi-périodique*.

**Question 13** Montrez qu'un pavage périodique est quasi-périodique.

**Question 14** Décrivez les motifs réguliers et les motifs critiques du pavage  $\pi$ .

► Soit  $p$  un pavage quasi-périodique du plan. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $f_p(n)$  le plus petit naturel non nul  $N$  tel que tout motif de côté  $N$  de  $p$  contienne au moins une occurrence de tout motif régulier de côté  $n$  de  $p$ .  $f_p$  est la *fonction de quasi-périodicité* du pavage.

**Question 15** Justifiez la relation  $f_p(n) = \max\{\rho_p(m) \mid m \in \mathcal{M}_p(n)\}$ .

**Question 16** Montrez que  $f_p$  est croissante.

**Question 17** Montrez que  $f_p$  est *strictement* croissante.

**Question 18** Justifiez la relation  $g_p(n) \leq (f_p(n) - n + 1)^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Question 19** \*\*\* Montrez qu'un pavage  $p$  est périodique si et seulement si la suite de terme général  $f_p(n) - n$  est stationnaire.

### 4 Relation d'extraction

► Soient  $p$  et  $q$  deux pavages du plan. Nous dirons que  $p$  est *extrait* de  $q$ , ce que nous noterons  $p \prec q$ , si tout motif apparaissant dans  $p$  apparaît aussi dans  $q$ . Clairement,  $\prec$  est réflexive et transitive; c'est donc une relation de préordre sur l'ensemble des pavages.

**Question 20** Montrez que, si  $p \prec q$ , alors tout motif critique de  $p$  est aussi un motif critique de  $q$ .

**Question 21** Soient  $p$  et  $q$  deux pavages du plan vérifiant  $p \prec q$ . Comparez  $g_p(n)$  et  $g_q(n)$ . Comparez de même  $f_p(n)$  et  $f_q(n)$ .

**Question 22** Soit  $m$  un motif critique d'un pavage  $q$ . Montrez qu'il existe un pavage  $p$  extrait de  $q$ , mais dans lequel  $m$  n'apparaît pas.

**Question 23** Un pavage  $p$  est dit *minimal* pour la relation  $\prec$  si la relation  $q \prec p$  implique  $p \prec q$ . Montrez que les pavages quasi-périodiques sont les pavages minimaux pour la relation  $\prec$ .

**Question 24** \*\*\* Soit  $c$  un catalogue de tuiles; on suppose que  $c$  permet de paver le plan. Montrez que  $c$  permet de réaliser un pavage quasi-périodique du plan.

FIN