

Option Informatique en Spé MP et MP*

DS du jeudi 20 avril 2000 : le corrigé

1 Autour de la distance de Hamming

1.1 Distance de Hamming

Question 1 • Notons A (resp. B) l'ensemble des indices $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $u_i \neq v_i$ (resp. $v_i \neq w_i$); ainsi $d(u, v) = |A|$ et $d(v, w) = |B|$. Alors $u_i \neq w_i$ implique $u_i \neq v_i$ ou (inclusif) $v_i \neq w_i$, donc $i \in A \cup B$. Du coup :

$$\begin{aligned} d(u, w) &= \text{Card}\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid u_i \neq w_i\} \\ &\leq \text{Card}(A \cup B) \leq \text{Card } A + \text{Card } B = d(u, v) + d(v, w) \end{aligned}$$

Question 2 • Nous présentons deux des trois fonctions auxiliaires (`combine` fait partie de la bibliothèque `Caml`).

```
let rec intervalle i j =
  if i>j then [] else i::(intervalle (i+1) j) ;;

let list_of_string u =
  map (fun i -> u.[i]) (intervalle 0 (string_length u - 1)) ;;

let rec combine = function
  | ([], []) -> []
  | (t1::q1, t2::q2) -> (t1, t2)::(combine (q1, q2))
  | (_, _) -> failwith "listes de longueurs différentes" ;;

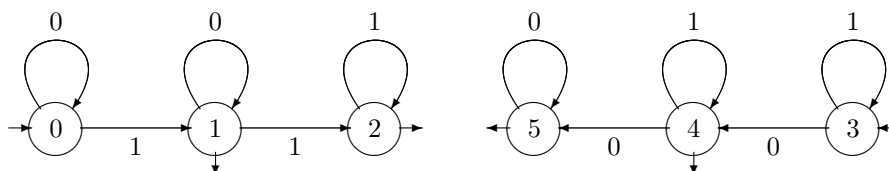
let rec filtre p = function
  | [] -> []
  | t::q when p t -> t::(filtre p q)
  | _::q -> filtre p q ;;

let distance su sv =
  let lu = list_of_string su and lv = list_of_string sv in
  list_length (filtre (fun (x,y) -> x<>y) (combine (lu,lv))) ;;
```

1.2 Voisinage de Hamming

Question 3 • Un mot de $\mathcal{H}(L)$ s'obtient en remplaçant un 0 par un 1, ou un 1 par un 0, dans un mot de la forme 0^p1^q avec $p + q \geq 1$. Ainsi, $\mathcal{H}(L)$ est l'ensemble des mots de la forme $0^a1^b1^c$ ou $0^a1^b01^c$. Il est donc décrit par l'expression rationnelle $0^*10^*1^* + 0^*1^*01^*$.

• L'automate proposé ci-dessous reconnaît $\mathcal{H}(L)$. Il comporte deux états initiaux; on sait que ceci ne constitue pas une restriction.



Question 4 • Cette fois, $\mathcal{H}(L)$ est l'ensemble des mots de la forme $0^a10^b1^{a+b+1}$ ou $0^{a+b+1}1^a01^b$.

Question 5 • Une récurrence immédiate montre que $||u|_1 - |u|_0| \leq q$ pour tout mot $u \in \mathcal{H}^q(L)$. Supposons que le langage $\mathcal{H}^q(L)$ soit rationnel. Le lemme de l'étoile affirme alors l'existence d'un naturel N tel que tout mot u de $\mathcal{H}^q(L)$, de longueur au moins N , se décompose en $u = xyz$ avec $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq N$ et $xy^*z \in \mathcal{H}^q(L)$. Appliquons ceci au mot $u = 0^N 1^{N+2q}$, qui est clairement dans $\mathcal{H}^q(L)$. Observons la décomposition de u dont le lemme de l'étoile affirme l'existence : on a nécessairement $x = 0^a$, $y = 0^b$ (avec $b \geq 1$) et $z = 0^{N-a-b} 1^{N+2q}$. La contradiction résulte alors de ce que le mot $xz = 0^{N-b} 1^{N+2q}$ n'appartient pas à $\mathcal{H}^q(L)$: en effet, $|xz|_1 - |xz|_0 = 2q + b > 2q$.

Question 6 • Soient q_1, q_2, \dots, q_n les éléments de Q . Soit $\widehat{Q} = \{\widehat{q}_1, \widehat{q}_1, \dots, \widehat{q}_n\}$ un ensemble de cardinal n , disjoint de Q . Définissons alors :

$$\widehat{\delta} = \{(q, 1 - x, \widehat{q}') \mid (q, x, q') \in \delta\}$$

Notons enfin $\widehat{F} = \{\widehat{q} \mid q \in F\}$. L'automate $\mathcal{A} = (Q \cup \widehat{Q}, \delta \cup \widehat{\delta}, i, \widehat{F})$ reconnaît $\mathcal{H}(L)$.

Question 7 • $\mathcal{H}(L \cup M) = \mathcal{H}(L) \cup \mathcal{H}(M)$ est une propriété générale des applications.

• De même, $\mathcal{H}(L \cap M) \subset \mathcal{H}(L) \cap \mathcal{H}(M)$ ne nécessite pas de preuve. L'inclusion peut être stricte : par exemple, avec $L = \{01\}$ et $M = \{10\}$ on aura $\mathcal{H}(L \cap M) = \emptyset$ tandis que $\mathcal{H}(L) \cap \mathcal{H}(M) = \{00, 11\}$.

Question 8 • $\mathcal{H}(L \cdot M) = (\mathcal{H}(L) \cdot M) \cup (L \cdot \mathcal{H}(M))$.

Question 9 • $\mathcal{H}(L^*) = L^* \cdot \mathcal{H}(L) \cdot L^*$.

Question 10 • On aura $\mathbf{H}(\emptyset) = \mathbf{H}(\varepsilon) = \emptyset$, $\mathbf{H}(0) = 1$, $\mathbf{H}(1) = 0$, $\mathbf{H}(e + e') = \mathbf{H}(e) + \mathbf{H}(e')$, $\mathbf{H}(e \cdot e') = \mathbf{H}(e) \cdot e' + e \cdot \mathbf{H}(e')$ et $\mathbf{H}(e^*) = e^* \cdot \mathbf{H}(e) \cdot e^*$.

Question 11 • Il suffit de transcrire les résultats de la question précédente :

```

let rec hamming = fonction
  | Vide | Epsilon -> Epsilon
  | Zero -> Un
  | Un -> Zero
  | Somme(e, e') -> Somme(hamming e, hamming e')
  | Produit(e, e') -> let he = hamming e and he' = hamming e'
    in Somme(Produit(he, e'), Produit(e, he'))
  | Etoile(e) -> Produit(Etoile e, Produit(hamming e, Etoile e));;
```

2 Itération, attraction...

2.1 Suites ultimement périodiques

Question 1 • Sens direct : il suffit d'exhiber un rang $n \geq n_0$ et multiple de p ; il est clair que $(n_0 + 1)p$ convient. Réciproque : il suffit de prendre $n_0 = p = n$.

Question 2 • La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prenant ses valeurs dans un ensemble fini, il existe (principe des tiroirs) des indices r et s distincts tels que $x_r = x_s$. Considérons alors le plus grand naturel k tel que x_0, x_1, \dots, x_k soient deux à deux distincts. Il existe $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ tel que $x_j = x_{k+1}$; il est clair que $n_0 = j$ et $p = k + 1 - j$ conviennent. La période est comprise entre 1 (suite stationnaire) et N (avec $f(t) = t + 1$ si $t < N$ et $f(N) = 1$). Le rang d'entrée dans la période est compris entre 0 (suite constante) et $N - 1$ (avec $f(t) = t + 1$ si $t < N$ et $f(N) = N$).

Question 3 • On utilise le résultat de la question ???. Notons F la fonction qui, au triplet $(a, b, c) \in E \times E \times \mathbb{N}$ associe le triplet $(f(a), f^2(b), c + 1)$. Il est clair que $F^n(x, x, 0) = (x_n, x_{2n}, n)$. Il suffit donc de s'arrêter lorsque l'on obtient un triplet dont les deux premières composantes sont égales.

```

let periode f x =
  let rec F(a,b,c) =
    let a' = f(a) and b' = f(f(b)) and c' = c+1 in
    if a' = b' then c' else F(a',b',c') in
  F(x,x,0);;
```

2.2 Bassins d'attraction d'une fonction itérable

Question 4 • Soient q, r et s trois éléments de E tels que $q \equiv r$ et $r \equiv s$. Soient n_q, n_r, n'_r et n_s des indices tels que $f^{n_q}(q) = f^{n_r}(r)$ et $f^{n'_r}(r) = f^{n_s}(s)$. Alors :

$$f^{n_q+n'_r}(q) = f^{n'_r}(f^{n_q}(q)) = f^{n'_r}(f^{n_r}(r)) = f^{n_r}(f^{n'_r}(r)) = f^{n_r}(f^{n_s}(s)) = f^{n_r+n_s}(q)$$

Ceci prouve $q \equiv s$.

Question 5 • Soit $x \in B$; notons $y = f(x)$. De l'égalité $f^0(y) = f^1(x)$, il résulte $y \equiv x$, donc $y \in B$.

Question 6 • Il existe des naturels n_x et n_y tels que $f^{n_x}(x) = f^{n_y}(y)$. Mais x est point fixe de f , donc $f^{n_x}(x) = x$, puis $f^{n_y}(y) = x$. Alors $f(f^{n_y}(y)) = f(x) = x = f^{n_y}(y)$: donc la suite de terme général $f^n(y)$ stationne à partir du rang n_y (et peut-être même avant ce rang).

Question 7 • Soient n_x et n_y définis comme à la question précédente. Soient également p la période et n_0 le rang d'entrée dans la période de la suite de terme général $f^n(x)$. Alors, pour $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} f^{n+n_y+p}(y) &= f^{n+p}(f^{n_y}(y)) = f^{n+p}(f^{n_x}(x)) = f^{n+p+n_x}(x) \\ &= f^{n_x+n+p}(x) = f^{n_x+n}(x) = f^n(f^{n_x}(x)) \\ &= f^n(f^{n_y}(y)) = f^{n+n_y}(y) \end{aligned}$$

Ceci montre que la suite de terme général $f^n(y)$ est ultimement périodique, et que p en est une période. Par raison de symétrie, les deux suites de termes généraux respectifs $f^n(x)$ et $f^n(y)$ ont même ensemble de périodes ; en particulier, la plus petite période de la première suite est aussi celle de la deuxième.

Question 8 • Supposons que les images de x par f^j et f^k soient identiques, avec $j \neq k$. On peut supposer $j < k$ sans perte de généralité. Alors :

$$f^k(x) = f^{k-j}(f^j(x)) = f^{k-j}(f^k(x))$$

Ainsi, $f^k(x)$ est point fixe de f^{k-j} , ce qui est contradictoire.

Question 9 • Un bassin de type I peut être fini : par exemple, l'application identique de E n'a que des bassins de ce type. Il en est de même pour un bassin de type II : considérer par exemple l'application $n \mapsto n + 1$ dans l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Enfin, un bassin de type III est nécessairement infini puisque les images d'un élément de ce bassin par les itérées de f sont deux à deux distinctes.

Question 10 • Soient x et y appartenant à un même bassin d'attraction de f^n . Il existe donc des naturels n_x et n_y tels que $(f^n)^{n_x}(x) = (f^n)^{n_y}(y)$, soit $f^{n n_x}(x) = f^{n n_y}(y)$: ceci montre que x et y sont dans un même bassin d'attraction de f . Ainsi, tout bassin d'attraction de f^n est entièrement contenu dans un bassin d'attraction de f . Ceci revient à dire que la relation d'équivalence associée à f^n est plus fine que la relation d'équivalence associée à f .

Question 11 • Le sens direct est clair : tout point fixe de f est point fixe de toute itérée de f . Réciproquement, supposons f^n simple. Comme chaque bassin de f contient au moins un bassin de f^n , f ne peut posséder qu'un bassin, qui ne peut être de type III. S'il était de type II, alors f^n posséderait plusieurs bassins.

Question 12 • Définissons f par les relations $f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 1$ et $f(n) = n + 1$ pour $n \geq 3$. f compte : un bassin de type I, réduit à 0 ; un bassin de type II, réduit au cycle $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$; et un bassin de type III, constitué par les autres naturels.

2.3 Un exemple

Question 13 • Soit x un élément d'un bassin B . Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $10^k x$ est encore dans B , qui est donc infini.

Question 14 • Il suffit de noter que $f(1) = 1$, donc le bassin d'attraction de 1 est de type I.

Question 15 Notons $x \rightarrow y$ lorsque $y = f(x)$. Alors :

$$\begin{aligned} x_0 = 2000 &\rightarrow x_1 = 2^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 4 \rightarrow x_2 = 4^2 = 16 \\ &\rightarrow x_3 = 1^2 + 6^2 = 37 \rightarrow x_4 = 3^2 + 7^2 = 58 \\ &\rightarrow x_5 = 5^2 + 8^2 = 89 \rightarrow x_6 = 8^2 + 9^2 = 145 \\ &\rightarrow x_7 = 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42 \rightarrow x_8 = 4^2 + 2^2 = 20 \\ &\rightarrow x_9 = 2^2 + 0^2 = 4 = x_1 \end{aligned}$$

Ceci montre que la suite de terme général $f^n(2000)$ est ultimement périodique, avec $n_0 = 1$ et $p = 8$.

Question 16 • Cette suite n'étant pas stationnaire, le bassin d'attraction de 2000 est de type II.

Question 17 • Soit $c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0$ l'écriture décimale de q : $q = \sum_{0 \leq i \leq k} 10^i c_i$. Comme $q \geq 100$, on a certainement

$k \geq 2$. Par ailleurs, $f(q) = \sum_{0 \leq i \leq k} (c_i)^2$. Pour $i \in [1, k-1]$, on a clairement $(c_i)^2 \leq 9c_i < 10c_i \leq 10^i c_i$. Et comme

$c_k \geq 1$, on a :

$$(c_0)^2 + (c_k)^2 \leq 9^2 + 9c_k = (81 - 91c_k) + 10^2 c_k < 10^k c_k \leq 10^0 c_0 + 10^k c_k$$

Par sommation, on obtient $\sum_{0 \leq i \leq k} (c_i)^2 < \sum_{0 \leq i \leq k} 10^i c_i$ soit $f(q) < q$.

Question 18 • Soit $x \in \mathbb{N}^*$; la suite de terme général $x_n = f^n(x)$ possède au moins un terme inférieur à 100, donc le bassin d'attraction de x contient au moins un naturel inférieur à 100, si bien que f possède au plus 99 bassins d'attraction.

Question 19 • L'écriture décimale d'un naturel $n \geq 10$ s'obtient en concaténant l'écriture décimale de $\lfloor n/10 \rfloor$ et le chiffre des unités de n . L'utilisation de l'opérateur @ nous donne une récursivité non terminale, et un coût en $\ln^2 n$. On réglerait simplement le problème en préparant l'écriture «à l'envers», et en infligeant un `rev` au résultat obtenu. Cette lourde tâche est laissée aux bons soins du lecteur consciencieux.

```
let rec psi = fonction
  | n when n < 10 -> [n]
  | n -> (psi (n/10)) @ (psi(n mod 10));;

let K l = let sum = it_list (prefix +) 0 and carre x = x*x
in sum (map carre l);;

let f n = K(psi n);;
```

Question 20 • On note que $q < 100$ implique $f(q) \leq 2 \cdot 9^2 = 162$. Donc l'intervalle $[1, 162]$ est stable par f . Il nous suffit, pour chaque élément q de cet intervalle, de calculer la suite des 163 premiers itérés (au plus) pour mettre en évidence la période de la suite de terme général $f^n(q)$. On choisit dans cette période le plus petit élément comme représentant canonique du bassin obtenu. Il reste à compter le nombre de représentants différents. Quelques lignes de Caml pour réaliser ce travail :

```
let rec intervalle i j =
  if i > j then [] else i :: (intervalle (i+1) j);;

let rec uniq = fonction
  | [] -> []
  | t :: q when mem t q -> uniq q
  | t :: q -> t :: (uniq q);;

let rec dropwhile p = fonction
  | [] -> []
  | t :: q when p t -> dropwhile p q
  | l -> l;;

let rec min_of_list = fonction
  | [] -> failwith "min liste vide"
  | [x] -> x
  | t :: q -> min t (min_of_list q);;

let bassin f n =
  let rec aux accu v = let v' = f(v) in if mem v' accu
    then min_of_list(dropwhile (fun x -> x <> v') (rev accu))
    else aux (v' :: accu) v'
  in aux [] n;;
```

```
let compte_bassins f =  
  list_length (uniq (map (bassin f) (intervalle 1 162))));;
```

Question 21 • On constate que f n'a pas d'autres bassins que les deux déjà rencontrés.

Question 22 • aux est de type $\text{int} \rightarrow \text{int list} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int list}$; g est de type $\text{int} \rightarrow \text{int list}$.

Question 23 • Soient c et r des naturels non nuls, et ℓ une liste de naturels. Notons $c' = c$, $r' = r - c^2$ et $\ell' = c :: \ell$ si $r \geq c^2$; et $c' = c - 1$, $r' = r$ et $\ell' = \ell$ si $r < c^2$. On constate que $r + K(\ell) = r' + K(\ell')$: la quantité $r + K(\ell)$ est donc invariante; sa valeur initiale est n . Par ailleurs, la condition $c \geq 1$ est conservée car $r < c^2$ implique $c \geq 2$; ceci montre que la quantité $r + c$ diminue strictement, ce qui prouve la terminaison de la fonction aux . Le résultat rendu est une liste ℓ telle que $K(\ell) = n$, c'est donc bien l'écriture décimale d'un élément de $f^{-1}(n)$.

• On n'obtient pas nécessairement le plus petit élément. Par exemple, avec $n = 89$ on récupère l'écriture décimale de 111111119, alors que 58 convient.

FIN