Option Informatique en Spé MP et MP*

Devoir surveillé du jeudi 20 avril 2000

Résumé

Ce sujet est organisé en deux problèmes indépendants. Le premier présente la notion de DISTANCE DE HAMMING entre deux mots de même longueur, puis vous invite à établir diverses propriétés des langages, et en particulier des langages rationnels, liées à cette distance.

Le deuxième texte définit la notion de *bassin d'attraction* d'une fonction itérable et établit quelques propriétés simples ; on étudie ensuite un exemple pratique.

Veuillez rédiger chaque exercice sur une copie séparée.

Table des matières

1 Autour de la distance de Hamming

▶ Dans tout le problème, X désigne l'alphabet $\{0{,}1\}$. Si e est une expression rationnelle sur cet alphabet, $\mathcal{L}_{ER}(e)$ désigne le langage décrit par e. Si $\mathcal{A}$ est un automate fini, $\mathcal{L}_{AF}(\mathcal{A})$ désigne le langage reconnu par $\mathcal{A}$.

1.1 Distance de Hamming

▶ Soient u et v deux mots de même longueur n sur l'alphabet X. La distance de Hamming de ces deux mots est :

$$d(u,v) = \mathrm{Card}\big\{ i \in [\![1,n]\!] \;\big|\; u_i \neq v_i \big\}$$

Par exemple, $d(0010110, 0110011) = 3$. Les deux relations $d(u,u) = 0$ et $d(u,v) = d(v,u)$ sont évidentes.

Question 1 • Prouvez que la distance de Hamming vérifie l'inégalité triangulaire :

$$d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$$

et ce quels que soient les mots u, v, w de même longueur.

Question 2 • Rédigez en Caml une fonction :

```
distance : string -> string -> int
```

spécifiée comme suit : `distance u v` calcule $d(u,v)$. Rappel : l'emploi de références est interdit. Vous pourrez utiliser les fonctions suivantes (que l'on ne demande pas de rédiger) :

```
list_of_string : string -> char list
combine : 'a list * 'b list -> ('a * 'b) list
filtre : ('a -> bool) -> 'a list -> 'a list
```

spécifiées comme suit :

- `list_of_string s` convertit la chaîne de caractères $s = c_1c_2 \dots c_n$ en une liste de caractères $(c_1, c_2, \dots, c_n)$; par exemple, `list_of_string "abc"` rend la liste `[`a`;`b`;`c`]`.
- `combine (l1,l2)` convertit le couple de listes de même longueur (ℓ_1, ℓ_2) en une liste de couples ; par exemple, `combine ([2;5;7];[`a`;`b`;`c`])` rend la liste `[(2,`a`);(5,`b`);(7,`c`)]`.
- `filtre p l` ne garde, dans la liste ℓ, que les éléments qui satisfont le prédicat p ; par exemple, `filtre (fun x -> x>0) [2;-3;7]` rend la liste `[2;7]`.

1.2 Voisinage de Hamming

▶ Soit L un langage sur l'alphabet X. On note $\mathcal{H}(L)$ le langage défini par :

$$u \in \mathcal{H}(L) \iff \exists v \in L : d(u,v) = 1$$

Question 3 • On note $L = \mathcal{L}_{ER}(0^*1^*)$. Donnez une expression rationnelle décrivant $\mathcal{H}(L)$, puis un automate fini reconnaissant ce langage.

▶ Dans les deux questions suivantes, $L = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Question 4 • Explicitez $\mathcal{H}(L)$.

Question 5 • Il est bien connu que L n'est pas rationnel. Mais existe-t-il un exposant $q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}^q(L)$ soit rationnel ?

▶ Soit L un langage rationnel ; on se propose de montrer que $\mathcal{H}(L)$ est également rationnel. Deux preuves différentes sont possibles : la première s'appuie sur les automates finis, la deuxième sur les expressions rationnelles.

Question 6 • Soit $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un automate fini reconnaissant L : on a donc $L = \mathcal{L}_{AF}(\mathcal{A})$. Construisez un automate fini $\mathcal{B}$ reconnaissant $\mathcal{H}(L)$.

▶ Dans les trois questions suivantes, L et M sont deux langages sur l'alphabet X.

Question 7 • Comparez les langages $\mathcal{H}(L \cup M)$ et $\mathcal{H}(L) \cup \mathcal{H}(M)$; comparez de même $\mathcal{H}(L \cap M)$ et $\mathcal{H}(L) \cap \mathcal{H}(M)$.

Question 8 • Exprimez $\mathcal{H}(L \cdot M)$ en fonction de L, M, $\mathcal{H}(L)$ et $\mathcal{H}(M)$.

Question 9 • Exprimez $\mathcal{H}(L^*)$ en fonction de L et $\mathcal{H}(L)$.

Question 10 • On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des expressions rationnelles sur X. Définissez par induction structurelle une application $\mathbf{H}$, de $\mathcal{E}$ dans lui-même, vérifiant $\mathcal{L}_{ER} \circ \mathbf{H} = \mathcal{H} \circ \mathcal{L}_{ER}$. En clair : si e décrit un langage L, alors $\mathbf{H}(e)$ décrit $\mathcal{H}(L)$.

▶ On définit le type `exprat` pour représenter en Caml les expressions rationnelles sur l'alphabet X :

```
type exprat = Vide | Epsilon | Zero | Un
 | Somme of exprat*exprat | Produit of exprat*exprat
 | Etoile of exprat;;
```

Par exemple, l'expression rationnelle $1 + (0 + 10)^*$ sera représentée par :

```
Somme(Un,Etoile(Somme(Zero,Produit(Un,Zero))))
```

Question 11 • Rédigez en Caml une fonction :

```
hamming : exprat -> exprat
```

spécifiée comme suit : `hamming e` construit l'expression rationnelle $\mathbf{H}(e)$.

2 Itération, attraction...

2.1 Suites ultimement périodiques

▶ On rappelle qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un ensemble E est dite *ultimement périodique* s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_{n+p} = x_n$ pour tout $n \geqslant n_0$; nous dirons alors que p est *une* période de cette suite. Le plus petit p convenant dans cette définition est *la* période de cette suite ; le plus petit n_0 est le *rang d'entrée* dans la période.

▶ Soient E un ensemble non vide, et f une application de E dans E. Associons à tout élément x de E la suite des images de x par les itérées de f, suite dont le terme général est $x_n = f^n(x)$. Nous avons donc $x_0 = x$, et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 1 • Montrez que cette suite est ultimement périodique si et seulement s'il existe un rang $n \geqslant 1$ tel que $x_{2n} = x_n$.

Question 2 • Dans cette question, E est un ensemble fini, de cardinal N. Montrez que la suite définie par f et x est ultimement périodique ; précisez les valeurs minimale et maximale de la période, puis celles du rang d'entrée dans la période (exemples à l'appui).

Question 3 • Rédigez en Caml une fonction :

```
periode : ('a -> 'a) -> 'a -> int
```

spécifiée comme suit : `periode f x` calcule une période de la suite de terme général $f^n(x)$, sous réserve que cette suite soit ultimement périodique.

2.2 Bassins d'attraction d'une fonction itérable

▶ Soient E un ensemble non vide, et $f : E \mapsto E$. Définissons sur E une relation $\equiv$ comme suit :

$$q \equiv r \iff \text{il existe des naturels } n_q \text{ et } n_r \text{ tels que } f^{n_q}(q) = f^{n_r}(r)$$

Il est clair que cette relation est réflexive et symétrique.

Question 4 • Montrez que $\equiv$ est transitive. Montrez également qu'elle est compatible avec f : si $q \equiv r$, alors $f(q) \equiv f(r)$.

▶ Un *bassin d'attraction* de f est une classe d'équivalence pour la relation $\equiv$. Soit B un tel bassin.

Question 5 • Montrez que $f(\mathsf{B}) \subset \mathsf{B}$.

Question 6 • Supposons qu'il existe un et un seul élément x de B qui soit point fixe de f : $f(x) = x$. Montrez que la suite des itérés par f de n'importe quel élément y de B est stationnaire, la «valeur de stationnement» étant x. Nous dirons que B est de type I.

Question 7 • Supposons maintenant que f n'a aucun point fixe dans B, mais qu'il existe un élément x de B et un rang $n > 1$ tels que x soit point fixe de f^n. Montrez que la suite des itérés par f de n'importe quel élément y de B est ultimement périodique, la période étant indépendante de y. Nous dirons que B est de type II.

Question 8 • Supposons enfin qu'aucun élément de B n'est point fixe d'une itérée de f. Montrez que les images d'un élément x quelconque de B par les itérées par f sont deux à deux distinctes. Nous dirons que B est de type III.

Question 9 • Parmi ces trois types de bassins, lesquels peuvent être finis ?

Question 10 • Soit $n \geqslant 2$. Montrez que tout bassin d'attraction de f^n est contenu dans un bassin d'attraction de f.

Question 11 • Nous dirons que f est *simple* si elle possède un seul bassin d'attraction, et si celui-ci est de type I. Soit $n \geqslant 2$. Montrez que f est simple ssi f^n l'est.

Question 12 • Construisez un exemple de fonction itérable possédant au moins un bassin de chacun des trois types. Vous prendrez $E = \mathbb{N}$.

2.3 Un exemple

▶ Notons X l'alphabet $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; nous noterons $\psi(n)$ l'écriture décimale de n ; ainsi, $\psi(n)$ est un mot sur X.

▶ Soit $u = u_1 u_2 \dots u_r$ un mot sur X ; notons $K(u) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} (u_k)^2$. Enfin, notons $f = K \circ \psi$.

▶ Il est clair que f est une application de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même ; on peut donc l'itérer. Par exemple, en partant de 205, nous aurons $f(205) = 2^2 + 0^2 + 5^2 = 29$, puis $f^2(205) = f(29) = 2^2 + 9^2 = 85$.

▶ Nous nous intéressons au nombre et à la nature des bassins d'attraction de f.

Question 13 • Montrez que chaque bassin d'attraction est infini.

Question 14 • Montrez que f possède un bassin d'attraction de type I.

Question 15 • Vérifiez que la suite de terme général $f^n(2000)$ est ultimement périodique.

Question 16 • Quel est le type du bassin d'attraction de 2000 ?

▶ Il résulte de ce qui précède que f possède au moins deux bassins d'attraction.

Question 17 • Justifiez l'affirmation suivante : si $q \geqslant 100$, alors $f(q) < q$.

Question 18 • En déduire que f ne possède qu'un nombre fini de bassins d'attraction, et qu'ils sont tous de type I ou II.

Question 19 • Décidons de représenter un mot u sur l'alphabet X, par une liste d'entiers de longueur $|u|$. Rédigez en Caml trois fonctions :

```
psi : int -> int list
K : int list -> int
f : int -> int
```

spécifiées comme suit :

- `psi n` construit la liste $\psi(n)$; par exemple, $\psi(235)$ construit la liste `[2;3;5]`.
- si le mot u est représenté par la liste ℓ, alors `K l` calcule $K(u)$; par exemple, `K [2;3;5]` rend pour résultat 38.
- `f n` calcule $f(n)$.

Question 20 • Décrivez un algorithme déterminant le nombre exact de bassins d'attraction de f. Notez bien qu'on ne vous demande pas de rédiger une fonction en Caml !

Question 21 • Si vous avez une calculatrice programmable (ou si vous êtes assez courageux), déterminez le nombre exact de bassins d'attraction de f.

▶ Définissons en Caml la fonction suivante :

```
let g n =
 let rec aux c l = function
  | 0 -> l
  | r when r>=c*c -> aux c (c::l) (r-c*c)
  | r -> aux (c-1) l r
 in aux 9 [] n;;
```

Question 22 • Quels sont les types respectifs des fonctions `aux` et `g` ?

Question 23 • Soit $n \geqslant 1$. Prouvez que la liste obtenue lorsque l'on calcule `g n` donne l'écriture décimale d'un élément de $f^{-1}(n)$. Cet élément est-il le plus petit de $f^{-1}(n)$?

FIN