Option Informatique en Spé MP et MP*
Itération, attraction : le corrigé

1 Suites ultimement périodiques

Question 1 • Sens direct : il suffit d'exhiber un rang $n \geqslant \max(n_0, 1)$ et multiple de p ; il est clair que $(n_0+1)p$ convient. Réciproque : il suffit de prendre $n_0 = p = n$.

Question 2 • La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prenant ses valeurs dans un ensemble fini, il existe (principe des tiroirs) des indices r et s distincts tels que $x_r = x_s$. Considérons alors le plus grand naturel k tel que $x_0, x_1, \ldots, x_k$ soient deux à deux distincts. Il existe $j \in [\![0, k]\!]$ tel que $x_j = x_{k+1}$; il est clair que $n_0 = j$ et $p = k+1-j$ conviennent. La période est comprise entre 1 (suite stationnaire) et N (avec $f(t) = t+1$ si $t < N$ et $f(N) = 1$). Le rang d'entrée dans la période est compris entre 0 (suite constante) et $N-1$ (avec $f(t) = t+1$ si $t < N$ et $f(N) = N$).

Question 3 • Utilisons le résultat de la question 1. Notons F la fonction qui, au triplet $(a, b, c) \in E \times E \times \mathbb{N}$ associe le triplet $\big(f(a), f^2(b), c+1\big)$. Il est clair que $F^n(x, x, 0) = (x_n, x_{2n}, n)$. Il suffit donc de s'arrêter lorsque nous obtenons un triplet dont les deux premières composantes sont égales.

```
let periode f x =
 let rec F(a,b,c) =
  let a' = f(a) and b' = f(f(b)) and c' = c+1 in
   if a' = b' then c' else F(a',b',c') in
 F(x,x,0);;
```

2 Bassins d'attraction d'une fonction itérable

Question 4 • Soient q, r et s trois éléments de E tels que $q \equiv r$ et $r \equiv s$. Soint n_q, n_r, n'_r et n_s des indices tels que $f^{n_q}(q) = f^{n_r}(r)$ et $f^{n'_r}(r) = f^{n_s}(s)$. Alors :

$$f^{n_q+n'_r}(q) = f^{n'_r}\big(f^{n_q}(q)\big) = f^{n'_r}\big(f^{n_r}(r)\big) = f^{n_r}\big(f^{n'_r}(r)\big) = f^{n_r}\big(f^{n_s}(s)\big) = f^{n_r+n_s}(q)$$

Ceci prouve $q \equiv s$.

Question 5 • Soit $x \in \mathsf{B}$; notons $y = f(x)$. De l'égalité $f^0(y) = f^1(x)$, il résulte $y \equiv x$, donc $y \in \mathsf{B}$.

Question 6 • Il existe des naturels n_x et n_y tels que $f^{n_x}(x) = f^{n_y}(y)$. Mais x est point fixe de f, donc $f^{n_x}(x) = x$, puis $f^{n_y}(y) = x$. Alors $f\big(f^{n_y}(y)\big) = f(x) = x = f^{n_y}(y)$: donc la suite de terme général $f^n(y)$ stationne à partir du rang n_y (et peut-être même avant ce rang).

Question 7 • Soient n_x et n_y définis comme à la question précédente. Soient également p la période et n_0 le rang d'entrée dans la période de la suite de terme général $f^n(x)$. Alors, pour $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned} f^{n+n_y+p}(y) &= f^{n+p}\big(f^{n_y}(y)\big) = f^{n+p}\big(f^{n_x}(x)\big) = f^{n+p+n_x}(x) \\ &= f^{n_x+n+p}(x) = f^{n_x+n}(x) = f^{n}\big(f^{n_x}(x)\big) \\ &= f^{n}\big(f^{n_y}(y)\big) = f^{n+n_y}(y) \end{aligned}$$

Ceci montre que la suite de terme général $f^n(y)$ est ultimement périodique, et que p en est une période. Par raison de symétrie, les deux suites de termes généraux respectifs $f^n(x)$ et $f^n(y)$ ont même ensemble de périodes ; en particulier, la plus petite période de la première suite est aussi celle de la deuxième.

Question 8 • Supposons que les images de x par f^j et f^k soient identiques, avec $j \neq k$. Nous pouvons supposer $j < k$ sans perte de généralité. Alors :

$$f^k(x) = f^{k-j}\big(f^j(x)\big) = f^{k-j}\big(f^k(x)\big)$$

Ainsi, $f^k(x)$ est point fixe de f^{k-j}, ce qui est contradictoire.

Question 9 • Un bassin de type I peut être fini : par exemple, l'application identique de E n'a que des bassins de ce type. Il en est de même pour un bassin de type II : considérer par exemple l'application $n \mapsto n+1$ dans l'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Enfin, un bassin de type III est nécessairement infini puisque les images d'un élément de ce bassin par les itérées de f sont deux à deux distinctes.

Question 10 • Soient x et y appartenant à un même bassin d'attraction de f^n. Il existe donc des naturels n_x et n_y tels que $(f^n)^{n_x}(x) = (f^n)^{n_y}(y)$, soit $f^{nn_x}(x) = f^{nn_y}(y)$: ceci montre que x et y sont dans un même bassin d'attraction de f. Ainsi, tout bassin d'attraction de f^n est entièrement contenu dans un bassin d'attraction de f. Ceci revient à dire que la relation d'équivalence associée à f^n est plus fine que la relation d'équivalence associée à f.

Question 11 • Le sens direct est clair : tout point fixe de f est point fixe de toute itérée de f. Réciproquement, supposons f^n simple. Comme chaque bassin de f contient au moins un bassin de f^n, f ne peut posséder qu'un bassin, qui ne peut être de type III. S'il était de type II, alors f^n posséderait plusieurs bassins.

Question 12 • Définissons f par les relations $f(0) = 0$, $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ et $f(n) = n + 1$ pour $n \geqslant 3$. f compte : un bassin de type I, réduit à 0 ; un bassin de type II, réduit au cycle $1 \to 2 \to 1$; et un bassin de type III, constitué par les autres naturels.

3 Un exemple

Question 13 • Soit x un élément d'un bassin B. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $10^k x$ est encore dans B, qui est donc infini.

Question 14 • Il suffit de noter que $f(1) = 1$, donc le bassin d'attraction de 1 est de type I.

Question 15 Notons $x \to y$ lorsque $y = f(x)$. Alors :

$$\begin{aligned}
x_0 = 2000 \quad &\to \quad x_1 = 2^2+0^2+0^2+0^2 = 4 \to x_2 = 4^2 = 16\\
&\to \quad x_3 = 1^2+6^2 = 37 \to x_4 = 3^2+7^2 = 58\\
&\to \quad x_5 = 5^2+8^2 = 89 \to x_6 = 8^2+9^2 = 145\\
&\to \quad x_7 = 1^2+4^2+5^2 = 42 \to x_8 = 4^2+2^2 = 20\\
&\to \quad x_9 = 2^2+0^2 = 4 = x_1
\end{aligned}$$

Ceci montre que la suite de terme général $f^n(2000)$ est ultimement périodique, avec $n_0 = 1$ et $p = 8$.

Question 16 • Cette suite n'étant pas stationnaire, le bassin d'attraction de 2000 est de type II.

Question 17 • Soit $c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0$ l'écriture décimale de q : $q = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} 10^i c_i$. Comme $q \geqslant 100$, nous avons certainement $k \geqslant 2$. Par ailleurs, $f(q) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} (c_i)^2$. Pour $i \in [\![1, k-1]\!]$, nous avons clairement $(c_i)^2 \leqslant 9c_i < 10c_i \leqslant 10^i c_i$. Et comme $c_k \geqslant 1$, il vient :

$$(c_0)^2 + (c_k)^2 \leqslant 9^2 + 9c_k = (81 - 91c_k) + 10^2 c_k < 10^k c_k \leqslant 10^0 c_0 + 10^k c_k$$

Par sommation, nous obtenons $\sum_{0 \leqslant i \leqslant k} (c_i)^2 < \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} 10^i c_i$ soit $f(q) < q$.

Question 18 • Soit $x \in \mathbb{N}^*$; la suite de terme général $x_n = f^n(x)$ possède au moins un terme inférieur à 100, donc le bassin d'attraction de x contient au moins un naturel inférieur à 100, si bien que f possède au plus 99 bassins d'attraction.

Question 19 • L'écriture décimale d'un naturel $n \geqslant 10$ s'obtient en concaténant l'écriture décimale de $\lfloor n/10 \rfloor$ et le chiffre des unités de n. L'utilisation de l'opérateur `@` nous donne une récursivité non terminale, et un coût en $\ln^2 n$. Nous pourrions régler simplement le problème en préparant l'écriture «à l'envers», et en infligeant un `rev` au résultat obtenu. Cette lourde tâche est laissée aux bons soins du lecteur consciencieux.

```
let rec psi = function
 | n when n<10 -> [n]
 | n -> (psi (n/10)) @ (psi(n mod 10));;
```

```
let K l = let sum = it_list (prefix +) 0 and carre x = x*x
 in sum (map carre l);;

let f n = K(psi n);;
```

Question 20 • Notons que $q < 200$ implique $f(q) \leqslant 1 \cdot 2 + 2 \cdot 9^2 = 163$. Donc l'intervalle $[\![1, 163]\!]$ est stable par f. Il nous suffit, pour chaque élément q de cet intervalle, de calculer la suite des 164 premiers itérés (au plus) pour mettre en évidence la période de la suite de terme général $f^n(q)$. Choisissons dans cette période le plus petit élément comme représentant canonique du bassin obtenu. Il reste à compter le nombre de représentants différents. Quelques lignesde Caml pour réaliser ce travail :

```
let rec intervalle i j =
 if i>j then [] else i::(intervalle (i+1) j);;

let rec uniq = function
 | [] -> []
 | t::q when mem t q -> uniq q
 | t::q -> t::(uniq q);;

let rec dropwhile p = function
 | [] -> []
 | t::q when p t -> dropwhile p q
 | l -> l;;

let rec min_of_list = function
 | [] -> failwith "min liste vide"
 | [x] -> x
 | t::q -> min t (min_of_list q);;

let bassin f n =
 let rec aux accu v = let v' = f(v) in if mem v' accu
  then min_of_list(dropwhile (fun x -> x<> v') (rev accu))
  else aux (v'::accu) v'
 in aux [n] n;;

let compte_bassins f =
 list_length (uniq (map (bassin f) (intervalle 1 163)));;
```

Question 21 • Nous constatons que f n'a pas d'autres bassins que les deux déjà rencontrés.

Question 22 • `aux` est de type `int -> int list -> int -> int list` ; `g` est de type `int -> int list`.

Question 23 • Soient c et r des naturels non nuls, et ℓ une liste de naturels. Notons $c' = c$, $r' = r - c^2$ et $\ell' = c :: \ell$ si $r \geqslant c^2$; et $c' = c - 1$, $r' = r$ et $\ell' = \ell$ si $r < c^2$. Constatons que $r + K(\ell) = r' + K(\ell')$: la quantité $r + K(\ell)$ est donc invariante ; sa valeur initiale est n. Par ailleurs, la condition $c \geqslant 1$ est conservée car $r < c^2$ implique $c \geqslant 2$; ceci montre que la quantité $r + c$ diminue strictement, ce qui prouve la terminaison de la fonction `aux`. Le résultat rendu est une liste ℓ telle que $K(\ell) = n$, c'est donc bien l'écriture décimale d'un élément de $f^{-1}(n)$.

• Nous n'obtenons pas nécessairement le plus petit élément. Par exemple, avec $n = 89$ nous récupérons l'écriture décimale de 111111119, alors que 58 convient. Le lecteur intéressé par ce dernier point regardera avec profit le sujet de l'épreuve d'informatique de la session 2002 du concours Centrale-Supélec (sujet consacré au problème du rendu de monnaie).

FIN

`[bassincor]` *Version du 17 décembre 2007*