Option Informatique en Spé MP et MP*
Itération, attraction

1 Suites ultimement périodiques

▶ On rappelle qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un ensemble E est dite *ultimement périodique* s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $x_{n+p} = x_n$ pour tout $n \geqslant n_0$; nous dirons alors que p est *une* période de cette suite. Le plus petit p convenant dans cette définition est *la* période de cette suite ; le plus petit n_0 est le *rang d'entrée* dans la période.

▶ Soient E un ensemble non vide, et f une application de E dans E. Associons à tout élément x de E la suite des images de x par les itérées de f, suite dont le terme général est $x_n = f^n(x)$. Nous avons donc $x_0 = x$, et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 1 • Montrez que cette suite est ultimement périodique si et seulement s'il existe un rang $n \geqslant 1$ tel que $x_{2n} = x_n$.

Question 2 • Dans cette question, E est un ensemble fini, de cardinal N. Montrez que la suite définie par f et x est ultimement périodique ; précisez les valeurs minimale et maximale de la période, puis celles du rang d'entrée dans la période (exemples à l'appui).

Question 3 • Rédigez en Caml une fonction :

```
periode : ('a -> 'a) -> 'a -> int
```

spécifiée comme suit : `periode f x` calcule une période de la suite de terme général $f^n(x)$, sous réserve que cette suite soit ultimement périodique.

2 Bassins d'attraction d'une fonction itérable

▶ Soient E un ensemble non vide, et $f : E \mapsto E$. Définissons sur E une relation $\equiv$ comme suit :

$$q \equiv r \iff \text{il existe des naturels } n_q \text{ et } n_r \text{ tels que } f^{n_q}(q) = f^{n_r}(r)$$

Il est clair que cette relation est réflexive et symétrique.

Question 4 • Montrez que $\equiv$ est transitive. Montrez également qu'elle est compatible avec f : si $q \equiv r$, alors $f(q) \equiv f(r)$.

▶ Un *bassin d'attraction* de f est une classe d'équivalence pour la relation $\equiv$. Soit B un tel bassin.

Question 5 • Montrez que $f(\mathsf{B}) \subset \mathsf{B}$.

Question 6 • Supposons qu'il existe un et un seul élément x de B qui soit point fixe de f : $f(x) = x$. Montrez que la suite des itérés par f de n'importe quel élément y de B est stationnaire, la «valeur de stationnement» étant x. Nous dirons que B est de type I.

Question 7 • Supposons maintenant que f n'a aucun point fixe dans B, mais qu'il existe un élément x de B et un rang $n > 1$ tels que x soit point fixe de f^n. Montrez que la suite des itérés par f de n'importe quel élément y de B est ultimement périodique, la période étant indépendante de y. Nous dirons que B est de type II.

Question 8 • Supposons enfin qu'aucun élément de B n'est point fixe d'une itérée de f. Montrez que les images d'un élément x quelconque de B par les itérées par f sont deux à deux distinctes. Nous dirons que B est de type III.

Question 9 • Parmi ces trois types de bassins, lesquels peuvent être finis ?

Question 10 • Soit $n \geqslant 2$. Montrez que tout bassin d'attraction de f^n est contenu dans un bassin d'attraction de f.

Question 11 • Nous dirons que f est *simple* si elle possède un seul bassin d'attraction, et si celui-ci est de type I. Soit $n \geqslant 2$. Montrez que f est simple ssi f^n l'est.

Question 12 • Construisez un exemple de fonction itérable possédant au moins un bassin de chacun des trois types. Vous prendrez $E = \mathbb{N}$.

3 Un exemple

▶ Notons X l'alphabet $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; nous noterons $\psi(n)$ l'écriture décimale de n ; ainsi, $\psi(n)$ est un mot sur X.

▶ Soit $u = u_1 u_2 \dots u_r$ un mot sur X ; notons $K(u) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant r} (u_k)^2$. Enfin, notons $f = K \circ \psi$.

▶ Il est clair que f est une application de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même ; on peut donc l'itérer. Par exemple, en partant de 205, nous aurons $f(205) = 2^2 + 0^2 + 5^2 = 29$, puis $f^2(205) = f(29) = 2^2 + 9^2 = 85$.

▶ Nous nous intéressons au nombre et à la nature des bassins d'attraction de f.

Question 13 • Montrez que chaque bassin d'attraction est infini.

Question 14 • Montrez que f possède un bassin d'attraction de type I.

Question 15 • Vérifiez que la suite de terme général $f^n(2000)$ est ultimement périodique.

Question 16 • Quel est le type du bassin d'attraction de 2000 ?

▶ Il résulte de ce qui précède que f possède au moins deux bassins d'attraction.

Question 17 • Justifiez l'affirmation suivante : si $q \geqslant 100$, alors $f(q) < q$.

Question 18 • En déduire que f ne possède qu'un nombre fini de bassins d'attraction, et qu'ils sont tous de type I ou II.

Question 19 • Décidons de représenter un mot u sur l'alphabet X, par une liste d'entiers de longueur $|u|$. Rédigez en Caml trois fonctions :

```
psi : int -> int list
K : int list -> int
f : int -> int
```

spécifiées comme suit :

- `psi n` construit la liste $\psi(n)$; par exemple, $\psi(235)$ construit la liste `[2;3;5]`.
- si le mot u est représenté par la liste ℓ, alors `K l` calcule $K(u)$; par exemple, `K [2;3;5]` rend pour résultat 38.
- `f n` calcule $f(n)$.

Question 20 • Décrivez un algorithme déterminant le nombre exact de bassins d'attraction de f. Notez bien qu'on ne vous demande pas de rédiger une fonction en Caml !

Question 21 • Si vous avez une calculatrice programmable (ou si vous êtes assez courageux), déterminez le nombre exact de bassins d'attraction de f.

▶ Définissons en Caml la fonction suivante :

```
let g n =
 let rec aux c l = function
  | 0 -> l
  | r when r>=c*c -> aux c (c::l) (r-c*c)
  | r -> aux (c-1) l r
 in aux 9 [] n;;
```

Question 22 • Quels sont les types respectifs des fonctions `aux` et `g` ?

Question 23 • Soit $n \geqslant 1$. Prouvez que la liste obtenue lorsque l'on calcule `g n` donne l'écriture décimale d'un élément de $f^{-1}(n)$. Cet élément est-il le plus petit de $f^{-1}(n)$?

FIN

`[bassin]` *Version du 17 décembre 2007*