

Option Informatique en Spé MP et MP*

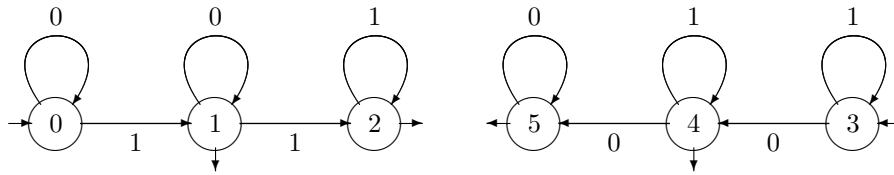
Autour de la distance de Hamming : le corrigé

Question 1 • Notons A (resp. B) l'ensemble des indices $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $u_i \neq v_i$ (resp. $v_i \neq w_i$); ainsi $d(u, v) = |A|$ et $d(v, w) = |B|$. Alors $u_i \neq w_i$ implique $u_i \neq v_i$ ou (inclusif) $v_i \neq w_i$, donc $i \in A \cup B$. Du coup :

$$\begin{aligned} d(u, w) &= \text{Card}\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid u_i \neq w_i\} \\ &\leq \text{Card}(A \cup B) \leq \text{Card } A + \text{Card } B = d(u, v) + d(v, w) \end{aligned}$$

Question 2 • Un mot de $\mathcal{H}(L)$ s'obtient en remplaçant un 0 par un 1, ou un 1 par un 0, dans un mot de la forme $0^p 1^q$ avec $p + q \geq 1$. Ainsi, $\mathcal{H}(L)$ est l'ensemble des mots de la forme $0^a 10^b 1^c$ ou $0^a 1^b 01^c$. Il est donc décrit par l'expression rationnelle $0^* 10^* 1^* + 0^* 1^* 01^*$.

• L'automate proposé ci-dessous reconnaît $\mathcal{H}(L)$. Il comporte deux états initiaux; on sait que ceci ne constitue pas une restriction.



Question 3 • Cette fois, $\mathcal{H}(L)$ est l'ensemble des mots de la forme $0^a 10^b 1^{a+b+1}$ ou $0^{a+b+1} 1^a 01^b$.

Question 4 • Une récurrence immédiate montre que $||u|_1 - |u|_0| \leq q$ pour tout mot $u \in \mathcal{H}^q(L)$. Supposons que le langage $\mathcal{H}^q(L)$ soit rationnel. Le lemme de l'étoile affirme alors l'existence d'un naturel N tel que tout mot u de $\mathcal{H}^q(L)$, de longueur au moins N , se décompose en $u = xyz$ avec $y \neq \varepsilon$, $|xy| \leq N$ et $xy^*z \subset \mathcal{H}^q(L)$. Appliquons ceci au mot $u = 0^N 1^{N+2q}$, qui est clairement dans $\mathcal{H}^q(L)$. Observons la décomposition de u dont le lemme de l'étoile affirme l'existence: on a nécessairement $x = 0^a$, $y = 0^b$ (avec $b \geq 1$) et $z = 0^{N-a-b} 1^{N+2q}$. La contradiction résulte alors de ce que le mot $xz = 0^{N-b} 1^{N+2q}$ n'appartient pas à $\mathcal{H}^q(L)$: en effet, $|xz|_1 - |xz|_0 = 2q + b > 2q$.

Question 5 • Soient q_1, q_2, \dots, q_n les éléments de Q . Soit $\widehat{Q} = \{\widehat{q}_1, \widehat{q}_1, \dots, \widehat{q}_n\}$ un ensemble de cardinal n , disjoint de Q . Définissons alors :

$$\widehat{\delta} = \{(q, 1-x, \widehat{q}') \mid (q, x, q') \in \delta\}$$

Notons enfin $\widehat{F} = \{\widehat{q} \mid q \in F\}$. L'automate $\mathcal{A} = (Q \cup \widehat{Q}, \delta \cup \widehat{\delta}, i, \widehat{F})$ reconnaît $\mathcal{H}(L)$.

Question 6 • $\mathcal{H}(L \cup M) = \mathcal{H}(L) \cup \mathcal{H}(M)$ est une propriété générale des applications.

• De même, $\mathcal{H}(L \cap M) \subset \mathcal{H}(L) \cap \mathcal{H}(M)$ ne nécessite pas de preuve. L'inclusion peut être stricte: par exemple, avec $L = \{01\}$ et $M = \{10\}$ on aura $\mathcal{H}(L \cap M) = \emptyset$ tandis que $\mathcal{H}(L) \cap \mathcal{H}(M) = \{00, 11\}$.

Question 7 • $\mathcal{H}(L \cdot M) = (\mathcal{H}(L) \cdot M) \cup (L \cdot \mathcal{H}(M))$.

Question 8 • $\mathcal{H}(L^*) = L^* \cdot \mathcal{H}(L) \cdot L^*$.

Question 9 • On aura $\mathbf{H}(\emptyset) = \mathbf{H}(\varepsilon) = \emptyset$, $\mathbf{H}(0) = 1$, $\mathbf{H}(1) = 0$, $\mathbf{H}(e + e') = \mathbf{H}(e) + \mathbf{H}(e')$, $\mathbf{H}(e \cdot e') = \mathbf{H}(e) \cdot e' + e \cdot \mathbf{H}(e')$ et $\mathbf{H}(e^*) = e^* \cdot \mathbf{H}(e) \cdot e^*$.

Question 10 • Il suffit de transcrire les résultats de la question précédente :

```
let rec hamming = fonction
  | Vide | Epsilon -> Epsilon
  | Zero -> Un
  | Un -> Zero
  | Somme(e,e') -> Somme(hamming e,hamming e')
  | Produit(e,e') -> let he = hamming e and he' = hamming e'
    in Somme(Produit(he,e'),Produit(e,he'))
  | Etoile(e) -> Produit(Etoile e,Produit(hamming e,Etoile e));;
```

FIN