Option Informatique en Spé MP et MP*
Autour de la distance de Hamming

► Dans tout le problème, X désigne l'alphabet $\{0,1\}$. Si e est une expression rationnelle sur cet alphabet, $\mathcal{L}_{ER}(e)$ désigne le langage décrit par e. Si $\mathcal{A}$ est un automate fini, $\mathcal{L}_{AF}(\mathcal{A})$ désigne le langage reconnu par $\mathcal{A}$.

► Soient u et v deux mots de même longueur n sur l'alphabet X. La distance de Hamming de ces deux mots est :

$$d(u,v) = \mathrm{Card}\big\{i \in [\![1,n]\!] \;\big|\; u_i \neq v_i\big\}$$

Par exemple, $d(0010110, 0110011) = 3$. Les deux relations $d(u,u) = 0$ et $d(u,v) = d(v,u)$ sont évidentes.

Question 1 • Prouvez que la distance de Hamming vérifie l'inégalité triangulaire :

$$d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$$

et ce quels que soient les mots u, v, w de même longueur.

► Soit L un langage sur l'alphabet X. On note $\mathcal{H}(L)$ le langage défini par :

$$u \in \mathcal{H}(L) \iff \exists v \in L : d(u,v) = 1$$

Question 2 • On note $L = \mathcal{L}_{ER}(0^*1^*)$. Donnez une expression rationnelle décrivant $\mathcal{H}(L)$, puis un automate fini reconnaissant ce langage.

► Dans les deux questions suivantes, $L = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Question 3 • Explicitez $\mathcal{H}(L)$.

Question 4 • Il est bien connu que L n'est pas rationnel. Mais existe-t-il un exposant $q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}^q(L)$ soit rationnel ?

► Soit L un langage rationnel ; on se propose de montrer que $\mathcal{H}(L)$ est également rationnel. Deux preuves différentes sont possibles : la première s'appuie sur les automates finis, la deuxième sur les expressions rationnelles.

Question 5 • Soit $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un automate fini reconnaissant L : on a donc $L = \mathcal{L}_{AF}(\mathcal{A})$. Construisez un automate fini $\mathcal{B}$ reconnaissant $\mathcal{H}(L)$.

► Dans les trois questions suivantes, L et M sont deux langages sur l'alphabet X.

Question 6 • Comparez les langages $\mathcal{H}(L \cup M)$ et $\mathcal{H}(L) \cup \mathcal{H}(M)$; comparez de même $\mathcal{H}(L \cap M)$ et $\mathcal{H}(L) \cap \mathcal{H}(M)$.

Question 7 • Exprimez $\mathcal{H}(L \cdot M)$ en fonction de L, M, $\mathcal{H}(L)$ et $\mathcal{H}(M)$.

Question 8 • Exprimez $\mathcal{H}(L^*)$ en fonction de L et $\mathcal{H}(L)$.

Question 9 • On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des expressions rationnelles sur X. Définissez par induction structurelle une application $\mathbf{H}$, de $\mathcal{E}$ dans lui-même, vérifiant $\mathcal{L}_{ER} \circ \mathbf{H} = \mathcal{H} \circ \mathcal{L}_{ER}$. En clair : si e décrit un langage L, alors $\mathbf{H}(e)$ décrit $\mathcal{H}(L)$.

► On définit le type `exprat` pour représenter en Caml les expressions rationnelles sur l'alphabet X :

```
type exprat = Vide | Epsilon | Zero | Un
 | Somme of exprat*exprat | Produit of exprat*exprat
 | Etoile of exprat;;
```

Par exemple, l'expression rationnelle $1 + (0 + 10)^*$ sera représentée par :

```
Somme(Un,Etoile(Somme(Zero,Produit(Un,Zero))))
```

Question 10 • Rédigez en Caml une fonction :

```
hamming : exprat -> exprat
```

spécifiée comme suit : `hamming e` construit l'expression rationnelle $\mathbf{H}(e)$.

FIN