Option Informatique en Spé MP et MP*

Devoir surveillé du mardi 1er février 2000

Résumé

Ce sujet a été spécialement conçu pour les MP. Il est organisé en trois exercices ; il vous permettra de réviser vos connaissances sur les circuits logiques, les automates finis, et enfin la logique telle que la percevait le concepteur du sujet du concours commun Centrale & co, session de 1998.

Veuillez rédiger chaque exercice sur une copie séparée.

Table des matières

1 Comparateurs **2**

2 Automates finis (Centrale 1998) **3**

3 Logique (Centrale 1998) **4**

1 Comparateurs

▶ Un *comparateur* n bits est un circuit logique comportant $2n$ entrées : n d'entre elles sont notées $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$; les n autres sont notées $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$. Il comporte également deux sorties notées s et e ; le comportement du circuit est défini de la façon suivante : notant $A = \sum_{0 \leqslant k < n} 2^k a_k$ et $B = \sum_{0 \leqslant k < n} 2^k b_k$ les nombres présentés sur les entrées, nous aurons :

- $e = 1$ et $s = 0$ si $A = B$
- $e = 0$ et $s = 1$ si $A > B$
- $e = 0$ et $s = 0$ si $A < B$

Question 1 • Donnez les équations d'un comparateur 1 bit, puis dessinez ce circuit en utilisant des portes logiques élémentaires (NON, ET à deux entrées, OU à deux entrées).

▶ Nous nous proposons de construire un comparateur n bits en mettant en cascade n comparateurs 1 bit. Le premier est identique à celui qui vient d'être construit ; il a pour entrées a_0 et b_0, et pour sorties e_0 et s_0. Les $n-1$ autres sont tous construits sur le même modèle : le k-ième comporte quatre entrées a_k, b_k, e_{k-1}, s_{k-1} et deux sorties e_k et s_k.

Question 2 • Donnez les équations de ce circuit, puis dessinez-le.

Question 3 • Notons $C(n)$ le nombre de portes logiques élémentaires nécessaires pour construire un comparateur n bits avec cette méthode, et $D(n)$ son délai (nombre maximal de portes traversées par les signaux avant obtention du résultat). Exprimez $C(n)$ et $D(n)$ en fonction de n.

▶ Nous nous proposons maintenant de construire un comparateur $2n$ bits en utilisant la méthode *diviser pour régner*. Pour ce faire, supposons construits deux comparateurs n bits ; notons $(a_k)_{0 \leqslant k < n}$ et $(b_k)_{0 \leqslant k < n}$ les entrées et e^L, s^L les sorties du premier ; notons $(a_k)_{n \leqslant k < 2n}$ et $(b_k)_{n \leqslant k < 2n}$ les entrées et e^H, s^H les sorties du deuxième. Nous allons ajouter à ces deux comparateurs un circuit combinatoire dont les entrées seront e^L, s^L, e^H et s^H ; les sorties de ce circuit seront e et s.

Question 4 • Donnez les équations logiques exprimant e et s en fonction de e^L, s^L, e^H et s^H.

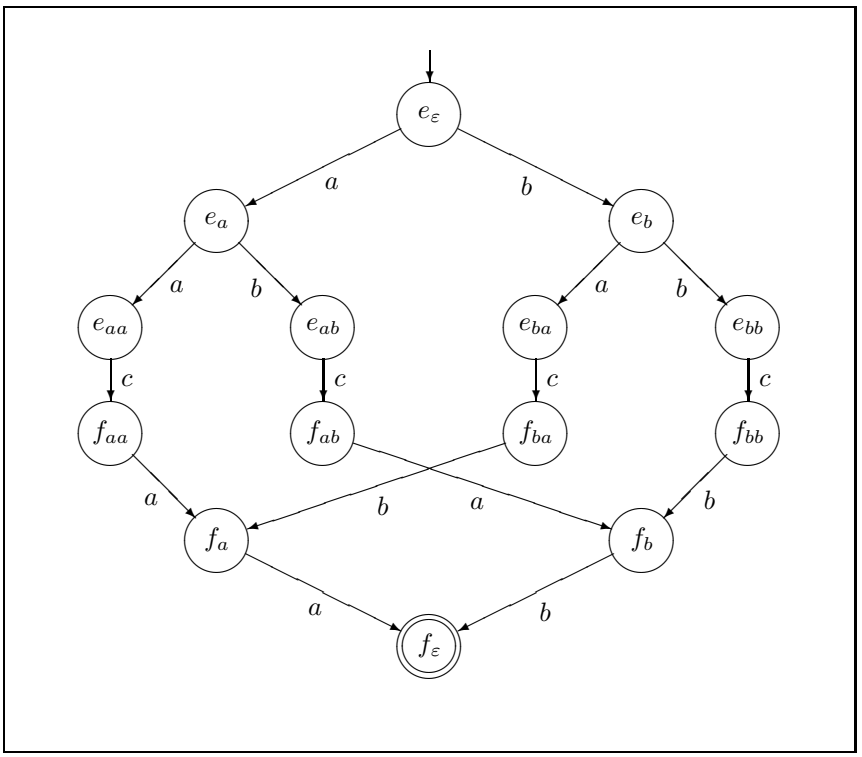
Question 5 • Notons $\Gamma(n)$ le nombre de portes logiques élémentaires nécessaires pour construire un comparateur n bits avec cette méthode, et $\Delta(n)$ son délai. Exprimez $\Gamma(2^p)$ et $\Delta(2^p)$ en fonction de p.

Question 6 • Dressez un tableau présentant les valeurs de $C(2^p)$, $D(2^p)$, $\Gamma(2^p)$ et $\Delta(2^p)$ pour $p \in [\![3, 6]\!]$.

2 Automates finis (Centrale 1998)

Question 1 Soit l'alphabet $X = \{a, b, c\}$. Montrez que l'automate déterministe, donné par le graphe ci-dessous, reconnaît le langage

$$L_2 = \left\{ u \cdot c \cdot u \;\middle|\; u \in \{a, b\}^*, |u| = 2 \right\}$$



▶ Dans les deux questions suivantes, on veillera à justifier la validité des constructions proposées.

Question 2 Généralisation : soit $n \geqslant 1$ un entier, construisez un automate déterministe qui reconnaît le langage :

$$L_n = \left\{ u \cdot c \cdot u \;\middle|\; u \in \{a, b\}^*, |u| = n \right\}$$

Quel est, en fonction de n, le nombre d'états de cet automate ?

Question 3 Construisez un automate non déterministe, qui reconnaît le langage suivant :

$$L'_n = \left\{ v \cdot c \cdot w \;\middle|\; \exists v_1, v_2, w_1, w_2, u \in \{a, b\}^* \text{ tq } u| = n, v = v_1 \cdot u \cdot v_2, w = w_1 \cdot u \cdot w_2 \right\}$$

Question 4 Donnez le nombre d'états de cet automate en fonction de n.

Question 5 Donnez le graphe d'un automate reconnaissant L'_2 (cas où $n = 2$).

▶ Soit $\mathcal{A}$ un automate fini non déterministe reconnaissant L'_n.

Question 6 Montrez que les états par lesquels passe l'automate $\mathcal{A}$ lorsqu'il reconnaît un mot de longueur $2n + 1$ sont tous distincts.

Question 7 Montrez que le nombre d'états accessibles de $\mathcal{A}$ est au moins $2^{n+1} - 1$.

Question 8 Montrez que tout automate déterministe ou non déterministe qui reconnaît L'_n a au moins $2^{n+2} - 2$ états.

Question 9 Donnez une expression rationnelle associée à L'_2.

Question 10 Donnez une expression rationnelle associée à $X^* \setminus L'_1$.

3 Logique (Centrale 1998)

▶ On appelle ici expression booléenne toute expression construite avec les variables booléennes $a, b, \ldots, z$, les connecteurs binaires $\vee$ (OU) et $\wedge$ (ET), le connecteur unaire $\neg$ (NON) et les deux connecteurs 0-aires (c'est-à-dire les constantes booléennes) T (VRAI) et F (FAUX).

Question 1 Montrez que toute expression booléenne est équivalente à une expression utilisant uniquement $\wedge$ et $\neg$ comme connecteurs.

▶ Soit G le connecteur ternaire défini par :

$$G(a, b, c) = (\neg(a) \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge (\neg(b))) \vee (\neg(b) \wedge \neg(c))$$

Question 2 Montrez que toute expression booléenne est équivalente à une expression utilisant uniquement G comme connecteur.

▶ Soit $-$ le connecteur binaire défini par $b - a = (\neg(a) \wedge b)$.

Question 3 Montrez que toute expression booléenne est équivalente à une expression utilisant uniquement $-$ et T comme connecteurs.

Question 4 Toute expression booléenne est-elle équivalente à une expression utilisant uniquement $-$ comme connecteur ?

FIN