

# Option Informatique en Spé MP et MP\*

Devoir surveillé du mardi 1<sup>er</sup> février 2000

## Résumé

Ce sujet a été spécialement conçu pour les MP. Il est organisé en trois exercices ; il vous permettra de réviser vos connaissances sur les circuits logiques, les automates finis, et enfin la logique telle que la percevait le concepteur du sujet du concours commun Centrale & co, session de 1998.

*Veillez rédiger chaque exercice sur une copie séparée.*

## Table des matières

1	Comparateurs	2
2	Automates finis (Centrale 1998)	3
3	Logique (Centrale 1998)	4

# 1 Comparateurs

► Un *comparateur*  $n$  bits est un circuit logique comportant  $2n$  entrées :  $n$  d'entre elles sont notées  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  ; les  $n$  autres sont notées  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ . Il comporte également deux sorties notées  $s$  et  $e$  ; le comportement du circuit est défini de la façon suivante : notant  $A = \sum_{0 \leq k < n} 2^k a_k$  et  $B = \sum_{0 \leq k < n} 2^k b_k$

les nombres présentés sur les entrées, nous aurons :

- $e = 1$  et  $s = 0$  si  $A = B$
- $e = 0$  et  $s = 1$  si  $A > B$
- $e = 0$  et  $s = 0$  si  $A < B$

**Question 1** • Donnez les équations d'un comparateur 1 bit, puis dessinez ce circuit en utilisant des portes logiques élémentaires (NON, ET à deux entrées, OU à deux entrées).

► Nous nous proposons de construire un comparateur  $n$  bits en mettant en cascade  $n$  comparateurs 1 bit. Le premier est identique à celui qui vient d'être construit ; il a pour entrées  $a_0$  et  $b_0$ , et pour sorties  $e_0$  et  $s_0$ . Les  $n - 1$  autres sont tous construits sur le même modèle : le  $k$ -ième comporte quatre entrées  $a_k, b_k, e_{k-1}, s_{k-1}$  et deux sorties  $e_k$  et  $s_k$ .

**Question 2** • Donnez les équations de ce circuit, puis dessinez-le.

**Question 3** • Notons  $C(n)$  le nombre de portes logiques élémentaires nécessaires pour construire un comparateur  $n$  bits avec cette méthode, et  $D(n)$  son délai (nombre maximal de portes traversées par les signaux avant obtention du résultat). Exprimez  $C(n)$  et  $D(n)$  en fonction de  $n$ .

► Nous nous proposons maintenant de construire un comparateur  $2n$  bits en utilisant la méthode *diviser pour régner*. Pour ce faire, supposons construits deux comparateurs  $n$  bits ; notons  $(a_k)_{0 \leq k < n}$  et  $(b_k)_{0 \leq k < n}$  les entrées et  $e^L, s^L$  les sorties du premier ; notons  $(a_k)_{n \leq k < 2n}$  et  $(b_k)_{n \leq k < 2n}$  les entrées et  $e^H, s^H$  les sorties du deuxième. Nous allons ajouter à ces deux comparateurs un circuit combinatoire dont les entrées seront  $e^L, s^L, e^H$  et  $s^H$  ; les sorties de ce circuit seront  $e$  et  $s$ .

**Question 4** • Donnez les équations logiques exprimant  $e$  et  $s$  en fonction de  $e^L, s^L, e^H$  et  $s^H$ .

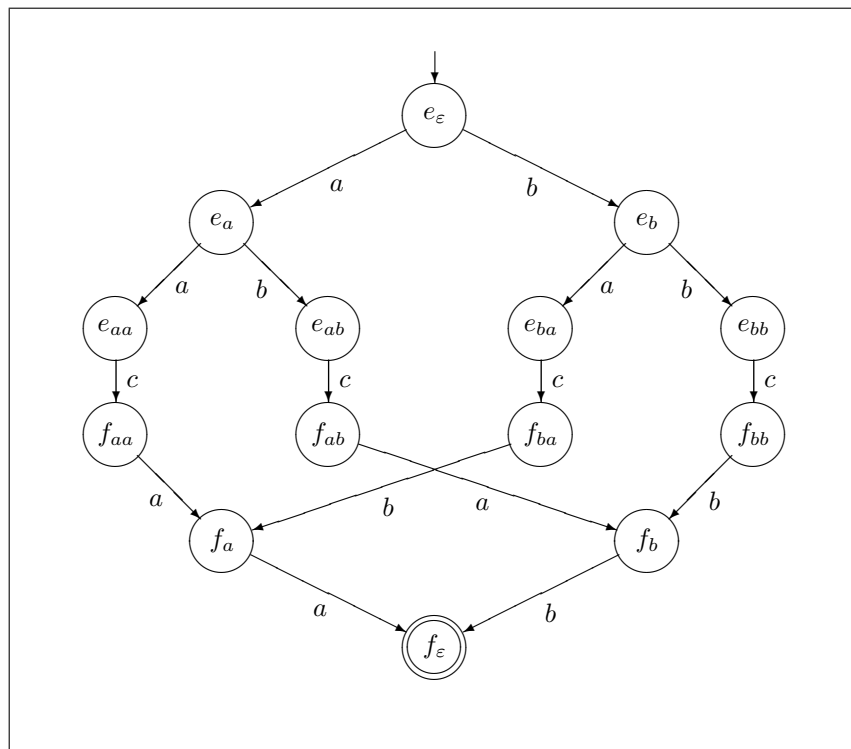
**Question 5** • Notons  $\Gamma(n)$  le nombre de portes logiques élémentaires nécessaires pour construire un comparateur  $n$  bits avec cette méthode, et  $\Delta(n)$  son délai. Exprimez  $\Gamma(2^p)$  et  $\Delta(2^p)$  en fonction de  $p$ .

**Question 6** • Dressez un tableau présentant les valeurs de  $C(2^p), D(2^p), \Gamma(2^p)$  et  $\Delta(2^p)$  pour  $p \in \llbracket 3, 6 \rrbracket$ .

## 2 Automates finis (Centrale 1998)

**Question 1** Soit l'alphabet  $X = \{a, b, c\}$ . Montrez que l'automate déterministe, donné par le graphe ci-dessous, reconnaît le langage

$$L_2 = \{u \cdot c \cdot u \mid u \in \{a, b\}^*, |u| = 2\}$$



► Dans les deux questions suivantes, on veillera à justifier la validité des constructions proposées.

**Question 2** Généralisation : soit  $n \geq 1$  un entier, construisez un automate déterministe qui reconnaît le langage :

$$L_n = \{u \cdot c \cdot u \mid u \in \{a, b\}^*, |u| = n\}$$

Quel est, en fonction de  $n$ , le nombre d'états de cet automate ?

**Question 3** Construisez un automate non déterministe, qui reconnaît le langage suivant :

$$L'_n = \{v \cdot c \cdot w \mid \exists v_1, v_2, w_1, w_2, u \in \{a, b\}^* \text{ tq } |u| = n, v = v_1 \cdot u \cdot v_2, w = w_1 \cdot u \cdot w_2\}$$

**Question 4** Donnez le nombre d'états de cet automate en fonction de  $n$ .

**Question 5** Donnez le graphe d'un automate reconnaissant  $L'_2$  (cas où  $n = 2$ ).

► Soit  $\mathcal{A}$  un automate fini non déterministe reconnaissant  $L'_n$ .

**Question 6** Montrez que les états par lesquels passe l'automate  $\mathcal{A}$  lorsqu'il reconnaît un mot de longueur  $2n + 1$  sont tous distincts.

**Question 7** Montrez que le nombre d'états accessibles de  $\mathcal{A}$  est au moins  $2^{n+1} - 1$ .

**Question 8** Montrez que tout automate déterministe ou non déterministe qui reconnaît  $L'_n$  a au moins  $2^{n+2} - 2$  états.

**Question 9** Donnez une expression rationnelle associée à  $L'_2$ .

**Question 10** Donnez une expression rationnelle associée à  $X^* \setminus L'_1$ .

### 3 Logique (Centrale 1998)

► On appelle ici expression booléenne toute expression construite avec les variables booléennes  $a, b, \dots, z$ , les connecteurs binaires  $\vee$  (OU) et  $\wedge$  (ET), le connecteur unaire  $\neg$  (NON) et les deux connecteurs 0-aires (c'est-à-dire les constantes booléennes) T (VRAI) et F (FAUX).

**Question 1** Montrez que toute expression booléenne est équivalente à une expression utilisant uniquement  $\wedge$  et  $\neg$  comme connecteurs.

► Soit  $G$  le connecteur ternaire défini par :

$$G(a, b, c) = (\neg(a) \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge (\neg(b))) \vee (\neg(b) \wedge \neg(c))$$

**Question 2** Montrez que toute expression booléenne est équivalente à une expression utilisant uniquement  $G$  comme connecteur.

► Soit  $-$  le connecteur binaire défini par  $b - a = (\neg(a) \wedge b)$ .

**Question 3** Montrez que toute expression booléenne est équivalente à une expression utilisant uniquement  $-$  et T comme connecteurs.

**Question 4** Toute expression booléenne est-elle équivalente à une expression utilisant uniquement  $-$  comme connecteur?

**FIN**