Option Informatique en Spé MP et MP*
Comparateurs : le corrigé

Question 1 • Ici, $A = a_0$, $B = b_0$ donc $A = B$ ssi $a_0 = b_0$, si bien que $\boxed{e = a_0 b_0 + \overline{a_0}\,\overline{b_0}}$. $A > B$ ssi $a_0 > b_0$, soit $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$, donc $\boxed{s = a_0 \overline{b_0}}$.

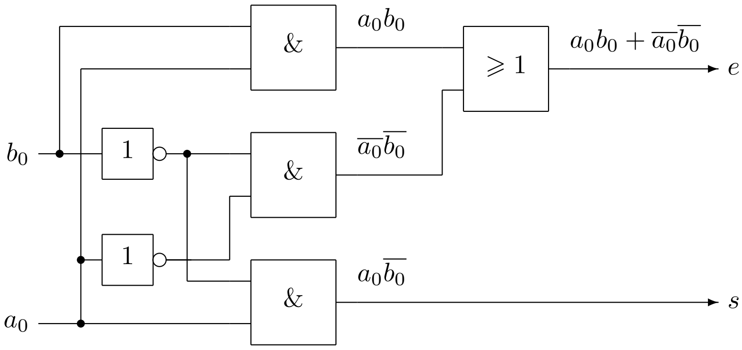

Figure 1: comparateur 1 bit

Le comparateur 1 bit utilise six portes, et son délai est égal à trois. Dans la suite, nous considérerons ce circuit comme une porte logique notée COMP, ayant deux entrées et deux sorties, et représentée comme l'indique la figure 2.

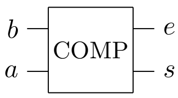

Figure 2: le symbole du comparateur 1 bit

Question 2 • Notons $A_k = \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} 2^i a_i$: $A_k = 2^k a_k + A_{k-1}$ et $0 \leqslant A_k < 2^k$, si bien que a_k et A_{k-1} sont respectivement le quotient et le reste dans la division de A_k par 2^k. Définissons de même B_k. Alors $A_k = B_k$ ssi $a_k = b_k$ et $A_{k-1} = B_{k-1}$, si bien que $\boxed{e_k = e_{k-1}(a_k b_k + \overline{a_k}\,\overline{b_k})}$.

• De même, $A_k > B_k$ ssi $a_k > b_k$, ou $a_k = b_k$ et $A_{k-1} > B_{k-1}$; par suite, $s_k = a_k \overline{b_k} + s_{k-1}(a_k b_k + \overline{a_k}\,\overline{b_k})$. Il est clair qu'une partie des calculs peut être assurée par un circuit COMP identique à celui réalisé à la question 1 : ses entrées seront a_k et b_k ; notant ε_k et σ_k ses sorties, nous aurons $\boxed{e_k = e_{k-1}\varepsilon_k \text{ et } s_k = \sigma_k + s_{k-1}\varepsilon_k}$.

Question 3 • Le comparateur n bits que nous nous proposons de construire fonctionne en *cascade* ; il est clair que sa taille comme son délai seront linéaires par rapport à n. Ce comparateur comporte un premier niveau formé de n comparateurs 1 bit qui fonctionnent en parallèle et nécessitent chacun 6 portes. Le deuxième étage est formé de $n-1$ circuits d'arbitrage réalisant la fonction $(e_{k-1}, s_{k-1}, \varepsilon_k, \sigma_k) \mapsto (e_k, s_k)$ et nécessitent chacun trois portes. Bilan : $\boxed{C(n) = 9n - 3}$.

• Les n comparateurs 1 bit fonctionnent en parallèle ; après un délai égal à 3, nous disposons des n couples $(\varepsilon_k, \sigma_k)$. La propagation des résultats à travers les $n-1$ circuits d'arbitrage de fait avec un délai $2(n-1)$. Finalement : $\boxed{D(n) = 2n + 1}$.

Question 4 • Notons $A_L = \sum_{0 \leqslant k < n} 2^{k-n} a_k$ et $A_H = \sum_{n \leqslant k < 2n} 2^k a_k$. Nous avons $A = 2^n A_H + A_L$ et $0 \leqslant A_L < 2^n$, si bien que A_H et A_L sont respectivement le quotient et le reste dans la division de A par 2^n. Définissons de même B_L et B_H. Alors $A = B$ ssi $A_H = B_H$ et $A_L = B_L$, si bien que $\boxed{e = e_H e_L}$. Ensuite, $A > B$ ssi $A_H > B_H$,

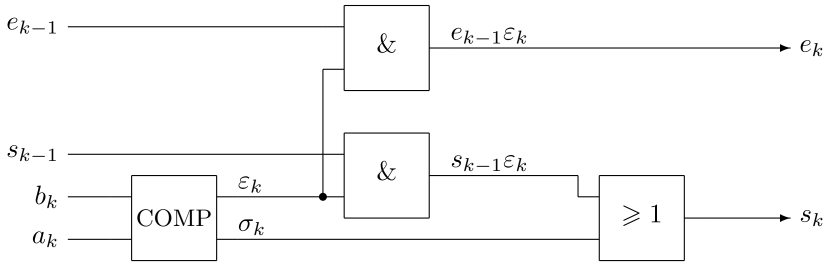

Figure 3: étage k du comparateur n bits

ou $A_H = B_H$ et $A_L > B_L$; ainsi $\boxed{s = s_H + e_H s_L}$. Cette couche logique utilise donc trois portes, et introduit un délai égal à deux.

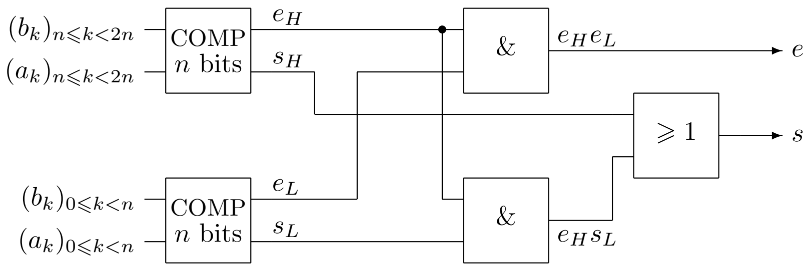

Figure 4: étage du comparateur «diviser pour régner»

Question 5 • $\Gamma(2^{p+1}) = 2\Gamma(2^p)+3$, donc $\Gamma(2^{p+1})+3 = 2(\Gamma(2^p)+3)$ puis $\Gamma(2^p)+3 = 2^p(\Gamma(1)+3) = 9{\cdot}2^p$ puisque $\Gamma(1) = C(1) = 6$; bref : $\boxed{\Gamma(2^p) = 9 \cdot 2^p - 3 = C(2^p)}$. Notons que le comparateur «diviser pour régner» requiert exactement autant de portes que le comparateur banal.

• De même, $\Delta(2^{p+1}) = \Delta(2^p) + 2$ puisque e_H et s_L doivent, chacun, traverser deux poretes logiques. $\Delta(1) = D(1) = 3$, donc $\boxed{\Delta(2^p) = 2p + 3}$: le comparateur «diviser pour régner» a un délai logarithmique par rapport à n.

Question 6 • Remplissage immédiat du tableau ci-dessous.

p	3	4	5	6
2^p	8	16	32	64
$C(2^p)$	69	141	285	573
$D(2^p)$	25	49	97	193
$\Gamma(2^p)$	69	141	285	573
$\Delta(2^p)$	9	11	13	15

FIN