

## Option Informatique en Spé MP et MP\*

### Comparateurs

► Un *comparateur*  $n$  bits est un circuit logique comportant  $2n$  entrées :  $n$  d'entre elles sont notées  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  ; les  $n$  autres sont notées  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ . Il comporte également deux sorties notées  $s$  et  $e$  ; le comportement du circuit est défini de la façon suivante : notant  $A = \sum_{0 \leq k < n} 2^k a_k$  et  $B = \sum_{0 \leq k < n} 2^k b_k$  les nombres présentés sur les entrées, nous aurons :

- $e = 1$  et  $s = 0$  si  $A = B$
- $e = 0$  et  $s = 1$  si  $A > B$
- $e = 0$  et  $s = 0$  si  $A < B$

**Question 1** • Donnez les équations d'un comparateur 1 bit, puis dessinez ce circuit en utilisant des portes logiques élémentaires (NON, ET à deux entrées, OU à deux entrées).

► Nous nous proposons de construire un comparateur  $n$  bits en mettant en cascade  $n$  comparateurs 1 bit. Le premier est identique à celui qui vient d'être construit ; il a pour entrées  $a_0$  et  $b_0$ , et pour sorties  $e_0$  et  $s_0$ . Les  $n - 1$  autres sont tous construits sur le même modèle : le  $k$ -ième comporte quatre entrées  $a_k, b_k, e_{k-1}, s_{k-1}$  et deux sorties  $e_k$  et  $s_k$ .

**Question 2** • Donnez les équations de ce circuit, puis dessinez-le.

**Question 3** • Notons  $C(n)$  le nombre de portes logiques élémentaires nécessaires pour construire un comparateur  $n$  bits avec cette méthode, et  $D(n)$  son délai (nombre maximal de portes traversées par les signaux avant obtention du résultat). Exprimez  $C(n)$  et  $D(n)$  en fonction de  $n$ .

► Nous nous proposons maintenant de construire un comparateur  $2n$  bits en utilisant la méthode *diviser pour régner*. Pour ce faire, supposons construits deux comparateurs  $n$  bits ; notons  $(a_k)_{0 \leq k < n}$  et  $(b_k)_{0 \leq k < n}$  les entrées et  $e^L, s^L$  les sorties du premier ; notons  $(a_k)_{n \leq k < 2n}$  et  $(b_k)_{n \leq k < 2n}$  les entrées et  $e^H, s^H$  les sorties du deuxième. Nous allons ajouter à ces deux comparateurs un circuit combinatoire dont les entrées seront  $e^L, s^L, e^H$  et  $s^H$  ; les sorties de ce circuit seront  $e$  et  $s$ .

**Question 4** • Donnez les équations logiques exprimant  $e$  et  $s$  en fonction de  $e^L, s^L, e^H$  et  $s^H$ .

**Question 5** • Notons  $\Gamma(n)$  le nombre de portes logiques élémentaires nécessaires pour construire un comparateur  $n$  bits avec cette méthode, et  $\Delta(n)$  son délai. Exprimez  $\Gamma(2^p)$  et  $\Delta(2^p)$  en fonction de  $p$ .

**Question 6** • Dressez un tableau présentant les valeurs de  $C(2^p), D(2^p), \Gamma(2^p)$  et  $\Delta(2^p)$  pour  $p \in \llbracket 3, 6 \rrbracket$ .

FIN