Option Informatique en Spé MP et MP*
Langages reconnaissables sur un alphabet à une seule lettre
Devoir à rendre après les vacances de la Toussaint

▶ Dans tout ce problème, on note A l'alphabet comportant la seule lettre a.

▶ À tout langage L sur un alphabet X, on associe la partie $\lambda(L)$ de $\mathbb{N}$ formée des longueurs des mots de L : $\lambda(L) = \{|u| : u \in L\}$.

▶ À toute partie P de $\mathbb{N}$, on associe le langage $\mathcal{L}(P) = \{a^p \mid p \in P\}$. On se propose de caractériser les parties P de $\mathbb{N}$ telles que le langage $\mathcal{L}(P)$ soit reconnaissable.

▶ Une partie P de $\mathbb{N}$ est *ultimement périodique* s'il existe $n_0 \geqslant 0$ et $p > 0$ tels que $n \in P \iff n + p \in P$ pour tout $n \geqslant n_0$.

Question 1 Soient $r \geqslant 0$ et $s > 0$. Montrez que le langage $L = \{a^{r+ks} \mid k \in \mathbb{N}\}$ est reconnaissable. Vous décrirez un automate reconnaissant ce langage.

Question 2 Le langage $L = \{a^p \mid \exists n \in \mathbb{N}$ tel que $p \equiv n^2 \bmod 1999\}$ est-il reconnaissable ?

Question 3 Montrez que, si P est ultimement périodique, alors $\mathcal{L}(P)$ est reconnaissable.

Question 4 Réciproquement, soit $L \subset A^*$ un langage reconnaissable. Soit $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un automate fini déterministe reconnaissant $\mathcal{A}$. Observez la suite de terme général $\delta^*(i, a^n)$ pour décrire le graphe de $\mathcal{A}$, puis montrez que $\lambda(L)$ est ultimement périodique.

▶ Soit R une partie non vide de A^*.

Question 5 Justifiez l'existence du plus grand diviseur commun d des longueurs des éléments de R.

Question 6 Montrez qu'il existe une partie finie G de A^* telle que $R^* = \{a^{kd} \mid k \in \mathbb{N}\} \setminus G$.

Question 7 Conclusion concernant R^* ?

▶ Soient X et Y deux alphabets. Un *morphisme* de X^* sur Y^* est une application $\varphi : X^* \mapsto Y^*$ vérifiant $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$ quels que soient les mots u et v pris dans X^*. Il est clair qu'un tel morphisme est parfaitement défini si l'on connaît les images des lettres de l'alphabet X.

Question 8 Montrez que, si $L \subset X^*$ est reconnaissable, alors $\varphi(L)$ est lui aussi reconnaissable.

Question 9 Montrez que si $L \subset X^*$ est reconnaissable, alors $\lambda(L)$ est ultimement périodique.

Question 10 Utilisez ce résultat pour montrer que l'ensemble des écritures décimales des factorielles n'est pas reconnaissable.

Question 11 Exhibez un langage L non reconnaissable, mais tel que $\lambda(L)$ soit ultimement périodique.

▶ Soit L un langage sur l'alphabet A. On lui associe la série entière $\displaystyle\sum_{n \in \lambda(L)} x^n$.

Question 12 Que pouvez-vous dire du rayon de convergence de cette série ?

Question 13 On suppose que L est reconnaissable. Montrez que la somme $S(x)$ de la série entière associée à L peut s'écrire $S(x) = T(x) + \dfrac{U(x)}{1 - x^p}$ où T et U sont deux éléments de $\mathbb{N}[X]$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

FIN