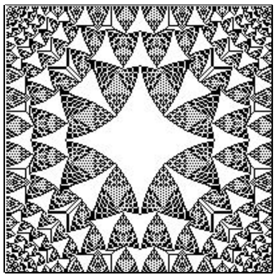
Option Informatique en Spé MP et MP*

Devoir surveillé du mardi 1er décembre 1998

L'automate des tas de sable



Résumé

Per Bak, Chao Tang et Kurt Wiesenfeld ont introduit en 1987 un automate cellulaire particulier appelé *automate des tas de sable*, pour modéliser certains phénomènes physiques, relevant de ce qu'il est convenu d'appeler l'*auto-organisation critique*.

Deepak Dhar a ensuite étudié cet automate, et mis en évidence des propriétés algébriques intéressantes; en particulier, l'ensemble de ses configurations récursives peut être muni d'une structure de groupe abélien.

La présentation adoptée ici est celle proposée par Olivier Marguin dans sa thèse de doctorat, soutenue en novembre 1997.

Veuillez rédiger chaque partie sur une copie séparée.

Table des matières

Notations, définitions, et mises en garde

▶ On note $\delta_{i,j}$ le symbole de Kronecker : il vaut 1 si $i = j$, 0 sinon.

▶ Un *automate des tas de sable* est constitué d'un ensemble fini de N *sites* (numérotés de 0 à $N-1$), d'un réel h appelé *hauteur critique* et d'une matrice Δ carrée d'ordre N à coefficients réels appelée *matrice de déversement* de l'automate.

▶ Un *état* de cet automate est une application z de $[\![0, N-1]\!]$ dans $\mathbb{R}$; $z(i)$ est la *hauteur* du site i. Un site i est *critique* si sa hauteur $z(i)$ est strictement supérieure à h, *stable* dans le cas contraire. Un état est *stable* lorsque tous ses sites le sont.

▶ L'état de l'automate va évoluer au cours du temps, considéré comme une variable *discrète*, à valeurs dans $\mathbb{N}$. Notons z^t l'état de l'automate et $\mathcal{C}(z^t)$ l'ensemble des sites critiques à l'instant t. L'état initial de l'automate est z^0 ; l'évolution de l'automate est régie par l'équation suivante :

$$z^{t+1}(j) = z^t(j) - \sum_{i \in \mathcal{C}(z^t)} \Delta_{i,j}$$

Clairement, si l'automate est dans un état stable, il reste indéfiniment dans cet état. Sinon, chaque site peut voir sa hauteur varier ; il sera donc susceptible de passer de l'état stable à l'état critique, ou inversement.

On peut admettre un résultat, à condition de le signaler clairement ; en tout état de cause, il est demandé de rédiger les questions dans l'ordre de l'énoncé. Les programmes devront être concis, et suffisamment documentés pour être compréhensibles. L'emploi de références est interdit. Les questions marquées $\star\star\star$ *sont, à mon sens, plus délicates.*

1 L'automate des tas de sable sur une grille rectangulaire

▶ On suppose ici que les sites forment une grille rectangulaire à p lignes et q colonnes (donc $N = pq$) ; ils sont numérotés par lignes successives de 0 (pour le site en haut et à gauche) à $N-1$ (pour le site en bas et à droite). Chaque site possède deux à quatre *voisins* : ce sont les sites qui sont immédiatement au nord, au sud, à l'est et à l'ouest ; par exemple, avec $p = 3$ et $q = 4$, le site 9 se trouve dans la troisième ligne ; il possède trois voisins, le site 8 (à l'ouest), le site 5 (au nord) et le site 10 (à l'est). On notera $\mathcal{V}(i)$ l'ensemble des sites voisins du site i.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11

▶ Dans toute la suite, on fixe $h = 3$, et la matrice de déversement est définie par $\Delta_{i,i} = 4$ pour tout site i, $\Delta_{i,j} = -1$ lorsque i et j sont deux sites voisins, $\Delta_{i,j} = 0$ lorsque i et j sont deux sites distincts mais non voisins. On suppose de plus que, dans la configuration initiale de l'automate (à l'instant 0), les hauteurs des sites sont toutes dans $\mathbb{N}$. On notera Δ_i la i-ième ligne de Δ : c'est donc un vecteur, élément de $\mathbb{R}^N$.

Question 1 • Dessinez la matrice de déversement pour le cas $p = 2$, $q = 3$.

▶ Pour visualiser le comportement de cet automate, on considèrera qu'en chaque site de la grille est disposée une pile de jetons. Si cette pile dépasse la hauteur critique, elle voit sa hauteur diminuer de 4 jetons, tandis que les cases voisines voient chacune leur hauteur augmenter d'un jeton ; nous dirons que le site a subi un *déversement*.

Question 2 • On suppose $p = 2$, $q = 3$. Décrivez l'évolution de l'automate placé initialement dans l'état décrit ci-dessous :

5	2	3
2	2	4

Question 3 • Montrez que les règles de fonctionnement de l'automate et les hypothèses particulières prises ici font que la hauteur de chaque site restera dans $\mathbb{N}$, au cours de l'évolution de l'automate.

▶ Soit i un site critique de l'état z ; on note τ_i l'opérateur de déversement de ce site : l'état $\tau_i(z)$ est défini par $\big(\tau_i(z)\big)(j) = z(j) - \Delta_{i,j}$ pour tout site j.

Question 4 • Montrez que si j est un site critique de z autre que i, alors j est encore un site critique de $\tau_i(z)$.

Question 5 • Soient i et k deux sites critiques distincts de z. Montrez que $\tau_i\big(\tau_k(z)\big) = \tau_k\big(\tau_i(z)\big)$.

▶ Une *avalanche* est une suite d'états obtenus par des déversements successifs ; plus précisément, une avalanche de longueur n commençant dans l'état z est une suite $(z_s)_{0\leqslant s\leqslant n}$ d'états, telle que $z_0 = z$ et pour laquelle il existe une suite $(i_s)_{1\leqslant s\leqslant n}$ de sites vérifiant $\tau_{i_s}(z_{s-1}) = z_s$ pour tout $s \in [\![1, n]\!]$.

▶ Soit i un site ; on note $d(i) = \mathrm{lig}(i) + \mathrm{col}(i)$ où $\mathrm{lig}(i) \in [\![0, p-1]\!]$ est le numéro de la ligne et $\mathrm{col}(i) \in [\![0, q-1]\!]$ le numéro de la colonne à l'intersection desquelles se trouve le site i ; $d(i)$ est donc la distance qui sépare le site i du site 0, au sens de la *taxi-distance* $\|\cdot\|_1$. Le dessin ci-dessous donne la valeur de $d(i)$ pour chaque site i, lorsque $p = 3$ et $q = 5$.

0	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6

▶ Soit z un état ; on note $H(z) = \sum\limits_{0\leqslant i<N} z(i)$ et $\mathcal{W}(z) = \sum\limits_{0\leqslant i<N} d^2(i)z(i)$. Un site i est dit *périphérique* s'il est sur l'un des *bords* de la grille, soit : $\mathrm{lig}(i) = 0$ ou $\mathrm{lig}(i) = p-1$ ou $\mathrm{col}(i) = 0$ ou $\mathrm{col}(i) = q-1$.

Question 6 • Soient z un état, i un site critique de z, et $z' = \tau_i(z)$. On suppose que i n'est pas un site périphérique. Calculez $\mathcal{W}(z') - \mathcal{W}(z)$.

Question 7 • En déduire que la longueur d'une avalanche n'affectant aucun site périphérique est bornée. Vous donnerez un majorant de la longueur d'une telle avalanche commençant dans un état z donné, en fonction de $D = \max(p, q)$ et de $M = \max\limits_{0\leqslant i<N} z(i)$.

Question 8 ⋆⋆⋆ • Montrez alors que la longueur d'une avalanche commençant dans un état z donné est bornée.

Question 9 • *Uniquement pour les 5/2 qui ont une bonne mémoire* : comment s'énonce la propriété précédente, avec le vocabulaire des systèmes de réécriture ?

▶ Soient z et z' deux états ; on note $z \to z'$ si $z = z'$ ou si z' se déduit de z par une avalanche.

Question 10 • Montrez que $\to$ est une relation d'ordre. Quels sont les éléments minimaux ?

▶ On note μ l'opérateur de *mise à jour* de l'automate : à un état z, il associe l'état $\mu(z)$ défini par :

$$\mu(z) = \left(\prod_{i\in\mathcal{C}(z)} \tau_i\right)(z)$$

Question 11 • Montrez que cette définition a bien un sens. Quels sont les états invariants par μ ?

Question 12 • Que pouvez-vous dire de la suite de terme général $\mu^n(z)$?

Question 13 • Soient z et z' deux états tels que $z \to z'$. Montrez que l'on a $\mu(z) \to \mu(z')$.

▶ On note $\mathcal{R}$ l'opérateur de *relaxation* de l'automate : à l'état z, il associe l'état stable $\mathcal{R}(z) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu^n(z)$ dans lequel l'automate finira inéluctablement par se trouver.

Question 14 • Soit i un site critique d'un état z. Montrez que $\mathcal{R}(z) = \mathcal{R}\big(\tau_i(z)\big)$

Question 15 • Soient z et z' deux états. Montrez que $z' = \mathcal{R}(z)$ ssi z' est stable et $z \to z'$.

Question 16 • *Uniquement pour les 5/2 qui ont une bonne mémoire* : comment s'énonce la propriété précédente, avec le vocabulaire des systèmes de réécriture ?

Question 17 ⋆⋆⋆ • Montrez que la matrice de déversement Δ est inversible ; on ne demande pas d'expliciter son inverse !

Question 18 ⋆⋆⋆ • Soient z et z' deux états tels que $z \to z'$. Montrez que deux avalanches quelconques menant de z à z' sont composées des mêmes éboulements, à une permutation de ceux-ci près.

2 Programmation de l'opérateur de relaxation

▶ On se propose de programmer l'opérateur de relaxation, en écrivant une fonction :

```
relaxe : int vect vect -> unit
```

spécifiée comme suit : `relaxe z` réalise la relaxation *in situ* de l'état décrit par la matrice z. On rappelle quelques éléments de Caml :

1. la fonction `vect_length : 'a vect -> int`, calcule le nombre d'éléments d'un vecteur
2. l'indexation des éléments d'un vecteur commence à 0
3. l'élément d'indice i d'un vecteur `v` est désigné par `v.(i)` ; pour affecter à cet élément la valeur x on dispose de la syntaxe `v.(i) <- x`
4. une matrice est un vecteur de vecteurs ; si `m` est une matrice, sa ligne d'indice ℓ est désignée par `m.(l)` et le coefficient situé ligne ℓ, colonne k est désigné par `m.(l).(k)`
5. les fonctions `fst : 'a*'b -> 'a` et `snd : 'a*'b -> 'b` rendent respectivement la première et la deuxième composante d'un couple.

▶ On a effectué la définition `let h = 3;;` une fois pour toutes ; les fonctions que vous écrirez pourront donc utiliser `h`.

▶ Si les arguments transmis à une fonction sont incorrects, celle-ci devra lever l'exception

```
Invalid_argument : string -> exn
```

en lui transmettant le nom de la fonction.

Question 19 • Comment obtient-on le nombre de colonnes d'une matrice `m` ?

Question 20 • Rédigez en Caml une fonction :

```
num_of_coords : int -> int -> int -> int -> int
```

spécifiée comme suit : `num_of_coords p q l k` calcule le numéro du site qui se trouve en ligne ℓ et en colonne k dans une grille de p lignes et q colonnes ; les lignes sont numérotées de haut en bas, et les colonnes de gauche à droite, à partir de 0 dans les deux cas.

Question 21 • Rédigez en Caml une fonction :

```
coords_of_num : int -> int -> int -> int*int
```

spécifiée comme suit : `coords_of_num p q i` calcule les coordonnées (ℓ, k) du site de numéro i dans une grille de p lignes et q colonnes.

Question 22 • `p` et `q` étant deux identificateurs de type `int`, on effectue les définitions :

```
let nc = num_of_coords p q and cn = coords_of_num p q;;
```

Qules sont les types respectifs de `nc` et `cn` ? Justifiez l'affirmation suivante : *les fonctions* `nc` *et* `cn` *ne sont pas inverses l'une de l'autre.* Quelles relations peut-on toutefois écrire entre ces deux fonctions ?

Question 23 • Rédigez en Caml une fonction :

```
voisins : int -> int -> int -> int list
```

spécifiée comme suit : `voisins p q i` dresse la liste des numéros des sites voisins du site i dans une grille de p lignes et q colonnes.

Question 24 • Rédigez en Caml une fonction :

```
tau : int -> int vect vect -> unit
```

spécifiée comme suit : `tau i` applique l'opérateur τ_i *in situ.*

Question 25 • Rédigez en Caml une fonction :

```
lsc : int vect vect -> int list
```

spécifiée comme suit : `lsc z` dresse une liste des sites critiques de l'état z. Cette liste pourra être dressée dans un ordre quelconque, mais ne devra pas comporter de doublons.

Question 26 • Rédigez en Caml une fonction :

```
mu : int vect vect -> unit
```

telle que `mu` applique μ *in situ.*

Question 27 • Rédigez alors en Caml la fonction `relaxe`.

3 États récursifs : définition, propriétés

▶ Soient x et y deux états ; on note $x + y$ leur somme, laquelle est définie par $(x + y)(i) = x(i) + y(i)$ pour tout site i.

Question 28 • Soient x, y et z trois états. On suppose $x \to y$. Montrez que $x + z \to y + z$.

▶ On note alors $x \oplus y' = \mathcal{R}(x + y)$: $x \oplus y$ est donc obtenu en superposant les deux états x et y, et en relaxant l'état obtenu.

Question 29 • Montrez que $\oplus$ est une loi commutative et associative, sur l'ensemble des états stables.

▶ On note $x \rightsquigarrow y$ s'il existe un état z tel que $y = x \oplus z$. On note h^* l'état stable maximal, défini par $h^*(i) = h$ pour tout site i. Un état z est *récursif* si $h^* \rightsquigarrow z$. Il est clair que tout état récursif est stable, et que h^* est un état récursif.

▶ Soit z un état stable. On notera $\overline{z}$ l'état (stable) défini par $(\overline{z})(i) = h - z(i)$ pour tout site i. Il est clair que $z \oplus \overline{z} = h^*$.

Question 30 • Justifiez : si z et z' sont deux états récursifs, alors $z \rightsquigarrow z'$.

Question 31 • Montrez que si l'automate possède au moins deux sites, il existe des états stables non récursifs.

▶ Soit z un état récursif ; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'état récursif $n \otimes z$ par récurrence : $1 \otimes z = z$, et $(n + 1) \otimes z = (n \otimes z) \oplus z$ pour $n \geqslant 1$.

▶ Soit i un site ; on note δ_i l'état défini par $\delta_i(j) = \delta_{i,j}$. Dans cet état, tous les sites ont une hauteur nulle, à l'exception du site i dont la hauteur est 1.

Question 32 $\star\star\star$ • Montrez qu'il existe n tel que $n \otimes \delta_i$ soit récursif.

4 Le groupe abélien des états récursifs

Question 33 • Soient a et b deux états récursifs. Montrez qu'il existe un état récursif x tel que $a \oplus x = b$.

Question 34 • Montrez alors que l'ensemble des états récursifs est un groupe abélien pour la loi $\oplus$.

▶ On note $\mathbf{I}$ l'état récursif élément neutre de $\oplus$.

Question 35 • En faisant appel à des considérations très simples, déterminez $\mathbf{I}$ lorsque $p = q = 2$.

Question 36 • Justifiez l'affirmation suivante : notant ρ le nombre d'états récursifs, on a $\mathbf{I} = \rho \otimes z$ quel que soit l'état récursif z.

Question 37 • Justifiez l'égalité $\mathbf{I} = h^* \oplus \overline{h^* \oplus h^*}$.

Question 38 • Proposez un algorithme de détermination de $\mathbf{I}$, et appliquez cet algorithme au cas $p = 2$, $q = 3$. Donnez un majorant du coût de l'exécution de cet algorithme (en nombre de déversements).

Question 39 • Rédigez en Caml une fonction :

```
état_identité : int -> int -> int vect
```

spécifiée comme suit : `état_identité p q` calcule l'état identité, pour l'automate sur la grille rectangulaire à p lignes et q colonnes.

The sand pile theory —self-organized criticality— is irresistible as a metaphor.
Al GORE, *Earth in Balance*

FIN