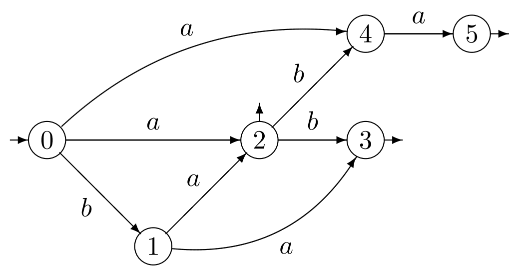
Option Informatique en Spé MP et MP*
Déterminisation d'un automate fini reconnaissant un langage fini d'après Kai Salomaa et Sheng Yu

► Dans tout le problème, nous utilisons un alphabet $X = \{a, b\}$ réduit à deux lettres.

► Notons $\mathcal{A}$ l'automate représenté ci-dessous :



Question 1 • Énumérez les mots du langage L reconnu par $\mathcal{A}$.

Question 2 • Déterminisez l'automate $\mathcal{A}$.

Question 3 • Montrez que tout langage fini sur X peut être reconnu par un automate fini déterministe dont le graphe est un arbre binaire. Que représente la hauteur de cet arbre ?

► Soit $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un automate (non déterministe) à $n = |Q|$ états, reconnaissant un langage L fini. Nous supposons que l'automate $\mathcal{A}$ est émondé : tous ses états sont accessibles et coaccessibles. Nous nous proposons de donner une borne supérieure du nombre d'états d'un automate déterministe complet reconnaissant L.

► δ est une partie de $Q \times X \times Q$; nous lui associons naturellement la fonction

$$(q, x) \in Q \times X \mapsto \{q' \in Q \mid (q, x, q') \in \delta\} \in \mathcal{P}(Q)$$

que nous noterons également δ. Nous définissons ensuite la fonction δ^* de $Q \times X^*$ dans $\mathcal{P}(Q)$ par $\delta^*(q, \varepsilon) = \{q\}$ et $\delta^*(q, ux) = \bigcup\limits_{q' \in \delta^*(q,u)} \delta(q', x)$ pour $u \in X^*$ et $x \in X$.

Question 4 • Montrez qu'il n'existe pas de cycle dans le graphe de $\mathcal{A}$.

Question 5 • Quelle est la longueur maximale d'un mot de L ?

► Notons $I = \{i\}$ et $\mathcal{A}' = (Q', \Delta, I, F')$ l'automate des parties associé à $\mathcal{A}$. La fonction de transition étendue de $\mathcal{A}'$ sera notée Δ^* ; elle est définie par $\Delta^*(S, \varepsilon) = S$ et $\Delta^*(S, ux) = \Delta\big(\Delta^*(S, u), x\big)$ quels que soient $S \in Q'$, $u \in X^*$ et $x \in X$.

Question 6 $\star\star$ • Soient $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_s\}$ et $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_t\}$ deux parties de Q' disjointes vérifiant la propriété suivante : pour tout $k \in [\![1, t]\!]$, il existe $j \in [\![1, s]\!]$ et $u \in X^+$ tels que $T_k = \Delta^*(S_j, u)$. Prouvez qu'il existe un état q de $\mathcal{A}$ tel que $q \in \bigcup\limits_{1 \leqslant j \leqslant s} S_j$ mais $q \notin \bigcup\limits_{1 \leqslant k \leqslant t} T_k$.

► Le *niveau* d'un état S de $\mathcal{A}'$ est la longueur minimale d'un mot u tel que $\Delta^*(I, u) = S$. L'unique état de niveau 0 est donc I ; les états de niveau $j+1$ sont les états qui ne sont pas de niveau j, mais qui peuvent être atteints par une seule transition de $\mathcal{A}'$, partant d'un état de niveau j. Nous noterons Q'_j l'ensemble des états de niveau j de $\mathcal{A}'$.

Question 7 • Soit j un indice tel que Q'_j ne soit pas vide. Montrez qu'il existe (au moins) un état q de $\mathcal{A}$, appartenant à (au moins) un état de niveau j de $\mathcal{A}'$, mais à aucun état de niveau strictement supérieur à j.

Question 8 • En déduire la majoration $\left|\bigcup_{k \geqslant j} Q'_k\right| \leqslant 2^{n-j}$.

Question 9 • Démontrez la majoration $|Q'_j| \leqslant \min(2^j, 2^{n-j})$.

Question 10 • En déduire les deux majorations suivantes :

- $|Q'| \leqslant 2^{p+1} - 1$ si $n = 2p$;
- $|Q'| \leqslant 3 \cdot 2^p - 1$ si $n = 2p + 1$.

► Nous allons montrer que ces majorations ne peuvent être améliorées.

► Soit L un langage sur l'alphabet X ; définissons sur X^* une relation $\equiv_L$ comme suit : $u \equiv_L v$ si, quel que soit $w \in X^*$:

$$\big(uw \in L\big) \iff \big(vw \in L\big)$$

Question 11 • Montrez que $\equiv_L$ est une relation d'équivalence.

Question 12 • Soient L un langage rationnel sur l'alphabet X et $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un automate fini déterministe complet reconnaissant L. Notons $\delta^*(i, u)$ l'état atteint par $\mathcal{A}$, placé initialement dans l'état i, après lecture du mot u. Montrez que, si $\delta^*(i, u) = \delta^*(i, v)$ alors $u \equiv_L v$.

Question 13 • En déduire que le nombre d'états de $\mathcal{A}$ est au moins égal au nombre de classes modulo $\equiv_L$.

► Dans les quatre questions suivantes, nous supposons n pair : $n = 2p$. Notons L l'ensemble des mots de la forme uav avec $|uav| < n$ et $|v| = p - 1$.

Question 14 • Construisez un automate fini non déterministe à n états reconnaissant L.

Question 15 • Soient x et y deux mots distincts, de longueur p au plus. Montrez que x et y ne sont pas équivalents modulo $\equiv_L$.

Question 16 • Montrez que tout mot de longueur strictement supérieure à p est équivalent modulo $\equiv_L$ à un mot de longueur p au plus.

Question 17 • En déduire que le nombre d'états d'un automate fini déterministe complet reconnaissant L est au moins égal à $2^{p+1} - 1$.

Question 18 • Montrez de même que la borne établie plus haut dans le cas où n est impair est optimale.

FIN