Option Informatique en Spé MP et MP*
Langages bidimensionnels
d'après Dora Giammarresi et Antonio Restivo

Résumé

Depuis plusieurs années, on cherche à étendre en dimension deux, voire au-delà, les résultats acquis sur les langages de mots (objets de dimension un) ; le premier travail consiste à définir la notion de mot bidimensionnel ; on peut ensuite étudier la complexité d'un tel mot, la reconnaissabilité d'un langage, chercher des classes intéressantes de langages...

La notion de *langage reconnaissable* peut être définie de plusieurs façons différentes, comme c'était déjà le cas pour les langages de mots ordinaires : automates capables de se déplacer dans les quatre directions (Blum et Hewitt, 1967) ; automates de tesselation (Inoue et Nakamura, 1977).

Giammarresi et Restivo ont présenté en 1992 une notion de reconnaissabilité inspirée à la fois par les langages locaux et certains types de pavages. Nous allons voir que plusieurs des propriétés des langages reconnaissables unidimensionnels restent valides dans ce cadre.

▶ Soit X un alphabet fini. Notons X^{**} l'ensemble des matrices à coefficients dans X, auquel nous adjoignons la matrice vide, de taille $(0,0)$. Autrement dit $w \in X^{**}$ ssi $w = \emptyset$ ou s'il existe $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $w \in \mathcal{M}_{n,p}(X)$.

▶ Soit $\#$ un symbole qui ne figure pas dans l'alphabet X. À tout élément w de X^{**} de taille (n,p), associons l'élément $\widehat{w}$ de $(X \cup \{\#\})^{**}$ de taille $(n+2, p+2)$ obtenu en bordant la matrice définissant w par des $\#$, comme le montre l'exemple ci-dessous :

$$w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \widehat{w} = \begin{pmatrix} \# & \# & \# & \# \\ \# & a & b & \# \\ \# & c & d & \# \\ \# & \# & \# & \# \end{pmatrix}$$

▶ À toute matrice z de taille (n,p) nous associons l'ensemble $B(z)$ des blocs $(2,2)$ que l'on peut en extraire ; cet ensemble est vide si $n < 2$ ou $p < 2$; sinon, son cardinal est $(n-1) \times (p-1)$. Voici un exemple pour fixer les idées :

$$w = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} \qquad B(w) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & r \\ y & z \end{pmatrix} \right\}$$

▶ Soit Θ un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(X \cup \{\#\})$. Notons $\mathcal{L}(\Theta) = \{w \mid B(\widehat{w}) \subset \Theta\}$ l'ensemble des matrices sur l'alphabet $X \cup \{\#\}$ dont tous les blocs $(2,2)$ extraits font partie de Θ.

▶ Nous dirons que le langage $L \subset X^{**}$ est *local* s'il existe un sous-ensemble Θ de $\mathcal{M}_2(X \cup \{\#\})$ tel que $L = \mathcal{L}(\Theta)$.

Question 1 Identifiez le langage $\mathcal{L}(\Theta)$ sur $X = \{0,1\}$ où Θ est donné par la liste de ses dix éléments ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & 0 \\ \# & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \# & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \# \\ 0 & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ \# & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ 1 & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & 0 \\ \# & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \# \\ \# & \# \end{pmatrix}$$

Bien entendu, vous fournirez une preuve rigoureuse à l'appui de votre affirmation.

Question 2 Décrivez de façon très simple, en français courant, le langage $\mathcal{L}(\Theta)$ sur $X = \{0, 1\}$ où Θ est donné par la liste de ses seize éléments ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & 1 \\ \# & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & 0 \\ \# & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \# & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \# & \# \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \# \\ 1 & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \# \\ 0 & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ \# & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ 0 & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & 0 \\ \# & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \# \\ \# & \# \end{pmatrix}$$

Ici encore, vous donnerez une preuve indiscutable de ce que vous énoncez.

Question 3 Le langage des matrices carrées sur X est-il local ?

▶ Un *système de briques* (SB dans la suite) est un quadruplet $\mathcal{T} = (X, X', \Theta', \pi)$ où π est une application de l'alphabet X' dans l'alphabet X et Θ' est une partie de $\mathcal{M}_2(X' \cup \{\#\})$.

▶ Le *langage reconnu* par un tel système de briques est $L = \pi\big(\mathcal{L}(\Theta')\big)$; nous dirons que L est *brique-reconnaissable* (BR en abrégé).

Question 4 Montrez que le langage des matrices carrées est BR.

Question 5 Montrez que tout langage $L = \{w\}$ de cardinal un est BR.

Question 6 L'ensemble des matrices dont le nombre de colonnes est fixé est-il BR ?

Question 7 Soient X, Y deux alphabets finis et α une application de X dans Y. Montrez que, si $L \subset X^{**}$ est BR, il en est de même de $\alpha(L) \subset Y^{**}$.

▶ Soit $L_1 \subset X^*$ un langage ordinaire. Nous l'identifions de façon naturelle avec un sous-langage L de X^{**} inclus dans l'ensemble des matrices à une ligne : par exemple, le mot *abca* s'identifie à la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c & a \end{pmatrix}$.

Question 8 Montrez que L_1 est rationnel ssi L est BR.

Question 9 Montrez que l'ensemble des langages BR est stable par union et par intersection finies.

▶ Soient w_1 et w_2 deux éléments de X^{**} ayant même nombre de lignes. Le *concaténé par colonnes* (CC dans la suite) de w_1 et w_2 est le mot $w_1 \oslash w_2$ obtenu en plaçant w_1 et w_2 côte à côte comme l'indique l'exemple ci-dessous :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad w_1 \oslash w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

▶ Définissons alors le concaténé par colonnes de deux langages L_1 et L_2 sur le même alphabet X comme suit :

$$L_1 \oslash L_2 = \{w_1 \oslash w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2, \text{ le nombre de ligne de } w_1 \text{ est égal à celui de } w_2\}$$

Question 10 Prouvez que si L_1 et L_2 sont BR, il en est de même de $L_1 \oslash L_2$.

Question 11 Nous définissons de façon naturelle l'*étoile colonne* d'un langage L, notée $L^{\oslash *}$: c'est le langage $\bigcup_n L^{\oslash n}$. Montrez que l'étoile colonne d'un BR est encore BR.

Question 12 Considèrons le langage sur l'alphabet $X = \{0, 1\}$ formé des matrices carrées de côté impair dont le centre est un 1. Montrez qu'il est BR.

Question 13 Donnez un exemple de langage BR dont le complémentaire n'est pas BR.

FIN