

# Option Informatique en Spé MP et MP\*

## Langages bidimensionnels

### d'après Dora Giammarresi et Antonio Restivo

#### Résumé

Depuis plusieurs années, on cherche à étendre en dimension deux, voire au-delà, les résultats acquis sur les langages de mots (objets de dimension un); le premier travail consiste à définir la notion de mot bidimensionnel; on peut ensuite étudier la complexité d'un tel mot, la reconnaissabilité d'un langage, chercher des classes intéressantes de langages. . .

La notion de *langage reconnaissable* peut être définie de plusieurs façons différentes, comme c'était déjà le cas pour les langages de mots ordinaires: automates capables de se déplacer dans les quatre directions (BLUM et HEWITT, 1967); automates de tessellation (INOUE et NAKAMURA, 1977).

GIAMMARRESI et RESTIVO ont présenté en 1992 une notion de reconnaissabilité inspirée à la fois par les langages locaux et certains types de pavages. Nous allons voir que plusieurs des propriétés des langages reconnaissables unidimensionnels restent valides dans ce cadre.

► Soit  $X$  un alphabet fini. Notons  $X^{**}$  l'ensemble des matrices à coefficients dans  $X$ , auquel nous adjoignons la matrice vide, de taille  $(0,0)$ . Autrement dit  $w \in X^{**}$  ssi  $w = \emptyset$  ou s'il existe  $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $w \in \mathcal{M}_{n,p}(X)$ .

► Soit  $\#$  un symbole qui ne figure pas dans l'alphabet  $X$ . À tout élément  $w$  de  $X^{**}$  de taille  $(n,p)$ , associons l'élément  $\hat{w}$  de  $(X \cup \{\#\})^{**}$  de taille  $(n+2, p+2)$  obtenu en bordant la matrice définissant  $w$  par des  $\#$ , comme le montre l'exemple ci-dessous :

$$w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \hat{w} = \begin{pmatrix} \# & \# & \# & \# \\ \# & a & b & \# \\ \# & c & d & \# \\ \# & \# & \# & \# \end{pmatrix}$$

► À toute matrice  $z$  de taille  $(n,p)$  nous associons l'ensemble  $B(z)$  des blocs  $(2,2)$  que l'on peut en extraire; cet ensemble est vide si  $n < 2$  ou  $p < 2$ ; sinon, son cardinal est  $(n-1) \times (p-1)$ . Voici un exemple pour fixer les idées :

$$w = \begin{pmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} \quad B(w) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ p & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ q & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & r \\ y & z \end{pmatrix} \right\}$$

► Soit  $\Theta$  un sous-ensemble de  $\mathcal{M}_2(X \cup \{\#\})$ . Notons  $\mathcal{L}(\Theta) = \{w \mid B(\hat{w}) \subset \Theta\}$  l'ensemble des matrices sur l'alphabet  $X \cup \{\#\}$  dont tous les blocs  $(2,2)$  extraits font partie de  $\Theta$ .

► Nous dirons que le langage  $L \subset X^{**}$  est *local* s'il existe un sous-ensemble  $\Theta$  de  $\mathcal{M}_2(X \cup \{\#\})$  tel que  $L = \mathcal{L}(\Theta)$ .

**Question 1** Identifiez le langage  $\mathcal{L}(\Theta)$  sur  $X = \{0,1\}$  où  $\Theta$  est donné par la liste de ses dix éléments ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & 0 \\ \# & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \# & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \# \\ 0 & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ \# & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ 1 & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & 0 \\ \# & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \# \\ \# & \# \end{pmatrix}$$

Bien entendu, vous fournirez une preuve rigoureuse à l'appui de votre affirmation.

**Question 2** Décrivez de façon très simple, en français courant, le langage  $\mathcal{L}(\Theta)$  sur  $X = \{0, 1\}$  où  $\Theta$  est donné par la liste de ses seize éléments ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & 1 \\ \# & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & 0 \\ \# & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \# & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \# & \# \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \# \\ 1 & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \# \\ 0 & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ \# & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & \# \\ 0 & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \# & 0 \\ \# & \# \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \# \\ \# & \# \end{pmatrix}$$

Ici encore, vous donnerez une preuve indiscutable de ce que vous énoncez.

**Question 3** Le langage des matrices carrées sur  $X$  est-il local?

► Un *système de briques* (SB dans la suite) est un quadruplet  $\mathcal{T} = (X, X', \Theta', \pi)$  où  $\pi$  est une application de l'alphabet  $X'$  dans l'alphabet  $X$  et  $\Theta'$  est une partie de  $\mathcal{M}_2(X' \cup \{\#\})$ .

► Le *langage reconnu* par un tel système de briques est  $L = \pi(\mathcal{L}(\Theta'))$ ; nous dirons que  $L$  est *brique-reconnaisable* (BR en abrégé).

**Question 4** Montrez que le langage des matrices carrées est BR.

**Question 5** Montrez que tout langage  $L = \{w\}$  de cardinal un est BR.

**Question 6** L'ensemble des matrices dont le nombre de colonnes est fixé est-il BR?

**Question 7** Soient  $X, Y$  deux alphabets finis et  $\alpha$  une application de  $X$  dans  $Y$ . Montrez que, si  $L \subset X^{**}$  est BR, il en est de même de  $\alpha(L) \subset Y^{**}$ .

► Soit  $L_1 \subset X^*$  un langage ordinaire. Nous l'identifions de façon naturelle avec un sous-langage  $L$  de  $X^{**}$  inclus dans l'ensemble des matrices à une ligne : par exemple, le mot *abca* s'identifie à la matrice  $\begin{pmatrix} a & b & c & a \end{pmatrix}$ .

**Question 8** Montrez que  $L_1$  est rationnel ssi  $L$  est BR.

**Question 9** Montrez que l'ensemble des langages BR est stable par union et par intersection finies.

► Soient  $w_1$  et  $w_2$  deux éléments de  $X^{**}$  ayant même nombre de lignes. Le *concaténé par colonnes* (CC dans la suite) de  $w_1$  et  $w_2$  est le mot  $w_1 \circ w_2$  obtenu en plaçant  $w_1$  et  $w_2$  côte à côte comme l'indique l'exemple ci-dessous :

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad w_1 \circ w_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

► Définissons alors le concaténé par colonnes de deux langages  $L_1$  et  $L_2$  sur le même alphabet  $X$  comme suit :

$$L_1 \circ L_2 = \{w_1 \circ w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2, \text{ le nombre de ligne de } w_1 \text{ est égal à celui de } w_2\}$$

**Question 10** Prouvez que si  $L_1$  et  $L_2$  sont BR, il en est de même de  $L_1 \circ L_2$ .

**Question 11** Nous définissons de façon naturelle l'*étoile colonne* d'un langage  $L$ , notée  $L^{\circ*}$  : c'est le langage  $\bigcup_n L^{\circ n}$ . Montrez que l'étoile colonne d'un BR est encore BR.

**Question 12** Considérons le langage sur l'alphabet  $X = \{0, 1\}$  formé des matrices carrées de côté impair dont le centre est un 1. Montrez qu'il est BR.

**Question 13** Donnez un exemple de langage BR dont le complémentaire n'est pas BR.

**FIN**