Option Informatique en Spé MP et MP*
Figures de pixels, mots de contour et pavages du plan

Les questions marquées $\star\star\star$ sont délicates ou subtiles (à mon avis).
L'emploi de références est interdit dans les programmes en Caml.

Définitions et notations

▶ Soient i et j deux relatifs ; la *case* (i, j) est le carré $[i, i+1] \times [j, j+1]$ de $\mathbb{R}^2$. Les *bords* de cette case sont les quatre segments

$$\begin{array}{ll} \big[(i,j),(i+1,j)\big] & \big[(i+1,j),(i+1,j+1)\big] \\ \big[(i+1,j+1),(i,j+1)\big] & \big[(i,j+1),(i,j)\big] \end{array}$$

Chacun de ces segments est adjacent à exactement *deux* cases. Une *figure* du plan est un ensemble *fini* de cases.

▶ Les figures considérées dans la suite étant finies, on pourra au besoin les supposer constituées de cases à coordonnées non négatives, et ≪calées≫ sur les axes, en ce sens qu'elles contiennent au moins une case de la forme $(0, j)$ et une case de la forme $(i, 0)$. Une telle figure est alors codée par une matrice dont le nombre de lignes et le nombre de colonnes sont suffisamment grands. On utilisera le type Caml suivant :

```
type figure == bool vect vect;;
```

Soit `f` de type `figure` ; `f.(i).(j)` sera égal à `true` si la case (i, j) appartient à la figure. L'*aire* d'une telle figure est le nombre de ses cases.

▶ La ligne L_j de la figure F est $\big\{i \mid (i,j) \in F\big\}$. On note N le plus grand indice j tel que L_j ne soit pas vide. Une figure F est *convexe par lignes* si pour tout $j \in [\![0, N]\!]$, la ligne L_j est, soit vide, soit un intervalle $[min_j, max_j]$. De façon similaire, on définit la notion de figure *convexe par colonnes*. Une figure est *convexe* si elle est convexe par lignes et convexe par colonnes.

1 Préliminaires

Question 1 • Rédigez en Caml une fonction :

```
aire : figure -> int
```

spécifiée comme suit : `aire F` calcule l'aire de la figure F.

▶ Un problème classique en infographie est le calcul de la boîte englobant une figure (*bounding box*) : c'est le plus petit rectangle à côtés parallèles aux axes contenant cette figure.

Question 2 • Rédigez en Caml une fonction :

```
bbox : figure -> int*int
```

spécifiée comme suit : `bbox F` calcule les dimensions (largeur, hauteur) de la boîte englobant la figure F.

▶ Une figure F est *connexe* si, pour toute paire de cases (i, j) et (k, ℓ) de F, il existe une suite $(i_r, j_r)_{0 \leqslant r \leqslant m}$ de cases de F vérifiant les conditions suivantes : $(i_0, j_0) = (i, j)$; $(i_m, j_m) = (k, \ell)$; et, pour tout indice $r \in [\![1, m]\!]$:

$$\big(i_r = i_{r-1} \text{ et } |j_r - j_{r-1}| = 1\big) \text{ ou } \big(|i_r - i_{r-1}| = 1 \text{ et } j_r = j_{r-1}\big)$$

Question 3 • Exhibez une figure du plan connexe au sens topologique usuel, mais pas au sens de la définition ci-dessus.

▶ Une figure connexe F est *sans trou* si son complémentaire (par rapport au plan entier) est un ensemble de cases connexe au sens défini ci-dessus.

Question 4 • Dessinez la plus petite figure connexe ayant un trou ; une preuve sera bienvenue.

2 Mots de contour d'une figure

► La *frontière* d'une figure F est l'ensemble des segments adjacents à une case de F et à une case du complémentaire de F.

► On définit les *mots de contour* d'une figure F connexe sans trou de la façon suivante : partant d'un point p quelconque de la frontière de F, on parcourt la suite des segments qui forment cette frontière dans le sens direct, c'est-à-dire en gardant toujours à sa gauche la case adjacente au segment parcouru appartenant à F, jusqu'à retrouver le point p de départ. On admettra que l'ensemble des segments de la frontière est ainsi parcouru sans répétition.

► Cette frontière est formée d'une suite de segments horizontaux ou verticaux de longueur 1. À chaque segment horizontal, on associe d ou g selon qu'il est parcouru dans le sens des abscisses croissantes ou décroissantes. À chaque segment vertical, on associe h ou b selon qu'il est parcouru dans le sens des ordonnées croissantes ou décroissantes. Au parcours de frontière précédent est donc associé un *mot de contour* sur l'alphabet $A = \{\mathtt{d}, \mathtt{g}, \mathtt{h}, \mathtt{b}\}$. Le *mot de contour canonique* est celui obtenu lorsque le point de départ p est le point de F d'abscisse minimale parmi ceux d'ordonnée minimale.

Question 5 • Dessinez la figure $\{(0,0), (1,0), (2,0), (1,1), (2,1), (3,1), (1,2)\}$.

Question 6 • Quel est le mot de contour canonique de cette figure ?

Question 7 • Soient u et v deux mots de contour d'une même figure F. Quelle relation existe-t-il entre les mots u et v ?

Question 8 • L'ensemble des mots de contour des figures connexes sans trou est-il un langage rationnel sur l'alphabet A ?

Question 9 ⋆⋆⋆ • Rédigez en Caml une fonction :

```
mot_de_contour : figure -> string
```

spécifiée comme suit : `mot_de_contour F` calcule le mot de contour canonique d'une figure F connexe sans trou.

Question 10 • Montrez que le nombre de cases d'une figure F connexe sans trou peut être calculé de façon simple à partir d'un mot de contour de F.

Question 11 • Rédigez en Caml une fonction :

```
aire_contour : string -> int
```

spécifiée comme suit : `aire_contour m` calcule l'aire de la figure connexe sans trou définie par le mot de contour m.

Question 12 • Soit F une figure connexe sans trou ; le *périmètre* de F est la longueur commune de tous ses mots de contour. En observant quelques cas particuliers, conjecturez une relation liant le périmètre de F, son aire, et le nombre de points à coordonnées entières situés à l'intérieur de la figure F.

Question 13 ⋆⋆⋆ • Démontrez cette relation.

Question 14 • Comment généraliser cette formule aux figures ayant un ou plusieurs trous ?

► Un mot u sur l'alphabet A n'est pas forcément un mot de contour d'une figure connexe. Par exemple, il est nécessaire que ce mot vérifie $|u|_{\mathtt{h}} = |u|_{\mathtt{b}}$ et $|u|_{\mathtt{g}} = |u|_{\mathtt{d}}$.

Question 15 • Montrez que cette condition n'est pas suffisante.

► L'étudiant Jean-Marcel MALHABILE affirme qu'un mot u sur l'alphabet A est un mot de contour d'une figure connexe si et seulement si il vérifie les deux conditions suivantes :

- $|u|_{\mathtt{h}} = |u|_{\mathtt{b}}$ et $|u|_{\mathtt{g}} = |u|_{\mathtt{d}}$
- aucun des mots `hb`, `bh`, `gd`, `dg` n'est facteur de u

Question 16 • Que pensez-vous de cette affirmation ?

Question 17 ⋆⋆⋆ • Rédigez en Caml une fonction :

```
contour_valide : string -> bool
```

spécifiée comme suit : `contour_valide u` décidera si le mot u sur l'alphabet A est un mot de contour d'une figure connexe.

Question 18 • Rédigez en Caml une fonction :

```
bbox' : string -> int*int
```

spécifiée comme suit : `bbox' m` calcule les dimensions de la boîte englobant une figure connexe décrite par le mot de contour m (supposé valide).

I shall short my word by lengthening my return
Shakespeare — Cymbeline

3 Itération d'un morphisme sur les mots de contour

► On définit sur A^* un morphisme φ par $\varphi(\mathtt{h}) = \mathtt{hhdhgh}$, $\varphi(\mathtt{b}) = \mathtt{bbgbdb}$, $\varphi(\mathtt{d}) = \mathtt{ddbdhd}$ et $\varphi(\mathtt{g}) = \mathtt{gghgbg}$. On définit alors une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mots sur l'alphabet A par la donnée de $u_0 = \mathtt{dhgb}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.

Question 19 • Explicitez u_1 et u_2.

Question 20 • Montrez que u_n est un mot de contour valide.

► On note P_n la figure dont u_n est le mot contour ; en particulier, la figure P_0 est réduite à une case.

Question 21 • Dessinez P_1 et P_2 (chaque case sera un carré de 5 mm de côté).

Question 22 • Quel est le périmètre $|u_n|$ de P_n ? Quelle est l'aire $\mathcal{A}_n$ de P_n ?

► On note Q_n l'image de P_n dans une homothétie de rapport 4^{-n}.

Question 23 • Explicitez le rapport ρ_n du périmètre de Q_n à son aire. Que remarquez-vous ? Comment définir $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n$? Quel qualificatif attribueriez-vous à cette partie du plan ?

4 Pavages avec des dominos

► Un *domino* est une figure formée de deux cases $\{(i,j),(i,j\pm 1)\}$ (domino *vertical*) ou $\{(i,j),(i\pm 1,j)\}$ (domino *horizontal*). Un *pavage* d'une figure F est une famille $(D_k)_{1\leqslant k\leqslant p}$ de dominos vérifiant $F = \bigcup\limits_{1\leqslant k\leqslant p} D_k$ et tels que, si $k \neq \ell$, alors $D_k \cap D_\ell$ ne contient aucune case.

► On suppose dans toute la suite que le plan est muni d'un *coloriage* défini comme suit : la case (i,j) est *blanche* si $i+j$ est pair, et *noire* sinon. Une figure est *équilibrée* si elle contient autant de cases noires que de cases blanches.

Question 24 • Montrez que toute figure pavable par des dominos est équilibrée.

Question 25 • Que pensez-vous de la réciproque ?

Question 26 • Quel est le nombre de façons de paver par des dominos le rectangle $\{(i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant 2\}$?

► Soit x_n le nombre de pavages du carré $\{(i,j) \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ par des dominos. D'après la question 24, $x_n = 0$ si n est impair. On suppose donc n pair.

Question 27 • Montrez que $2^{n^2/4} \leqslant x_n \leqslant 4^{n^2/2}$.

Question 28 • Améliorez la majoration précédente en prouvant que $x_n \leqslant 2^{n^2/2}$.

Question 29 ⋆⋆⋆ • Montrez qu'avec des dominos, on peut paver un carré de côté pair, amputé d'une case noire et d'une case blanche, et ce quels que soient les emplacements respectifs de ces deux cases dans le carré.

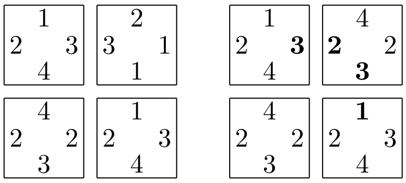
► Une figure F est un *trapèze* si elle est convexe et si, de plus, pour tout i, j allant de 1 à N, $(i,1) \in F$ dès que $(i,j) \in F$.

Question 30 • Montrez qu'une figure convexe par lignes est un trapèze ssi la suite (L_j) est décroissante pour l'inclusion.

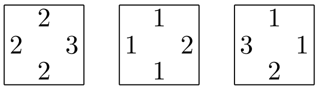
Question 31 ⋆⋆⋆ • Montrez qu'un trapèze est pavable par des dominos si et seulement s'il est équilibré.

5 Pavages du plan

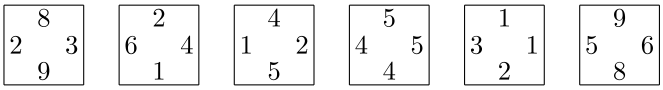
▶ On se propose de paver le plan au moyen de dalles carrées. Chaque dalle porte, sur chacun de ses côté, un motif (représenté par un nombre dans la suite). On dispose d'une infinité d'exemplaires de chaque modèle de dalle, mais il n'y a qu'un nombre fini de ces modèles. Les dalles ont une orientation : il est interdit de les faire tourner. De plus, le pavage doit respecter la contrainte «pas de conflits de voisinage» illustrée par la figure ci-dessous, dans laquelle la portion de pavage de gauche est licite, alors que celle de droite est interdite (on a **graissé** les motifs de/en conflit) :



Question 32 • Peut-on paver le plan avec le jeu de dalles suivant :



Question 33 • Peut-on paver le plan avec le jeu de dalles suivant :



Question 34 • On a défini le `type dalle = {h:int; b:int; g:int; d:int}`. Rédigez en Caml une fonction :

```
pavage_rectangle : int -> int -> dalle list -> dalle vect vect
```

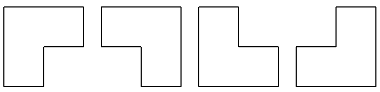
spécifiée comme suit : `pavage_rectangle p q catalogue` calcule un pavage d'un rectangle de largeur `p` et de hauteur `q`, en utilisant les modèles de dalles énumérés dans `catalogue` (de type `dalle list`) ; on lèvera une exception si un tel pavage n'existe pas.

Question 35 • On considère un arbre $\mathcal{T}$ de racine r ; les nœuds de $\mathcal{T}$ sont tous d'arité finie. Montrez que si $\mathcal{T}$ compte une infinité de nœuds, il existe un chemin infini partant de r.

Question 36 • À quel couple célèbre la preuve que vous venez de donner pour la question précédente vous fait-elle penser ? La réponse n'est pas *Roméo et Juliette*.

Question 37 $\star\star\star$ • Montrez que si l'on peut paver le quart de plan $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, alors on peut paver le plan entier.

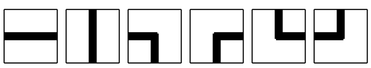
▶ On utilise maintenant des *triominos* : ce sont des dalles en forme de `L` ; il en existe quatre modèles différents, qui se déduisent l'un de l'autre par rotation d'angle $k\pi/2$:



Question 38 • Montrez qu'avec des triominos, on peut paver tout carré de côté 2^n auquel on a enlevé une case.

Question 39 • Montrez qu'avec des triominos, on peut paver le plan entier.

▶ On dispose maintenant du jeu de dalles suivant :



Question 40 $\star\star\star$ • Avec ce jeu de dalles, est-il possible de paver le plan de telle façon que l'on puisse aller de la case $(0,0)$ à une case (i,j) quelconque en suivant un «chemin» matérialisé sur les dalles par le trait gras ?

FIN