Option Informatique en Spé MP et MP*
La solution optimale du problème des tours de Hanoï ne comporte pas de facteur carré

► La solution optimale du problème des tours de Hanoï est bien connue : pour transférer une pile de n disques de l'aiguille α vers l'aiguille γ, on transfère les $n-1$ disques du dessus de la pile de l'aiguille α vers l'aiguille β, puis le plus grand disque de l'aiguille α vers l'aiguille γ, et enfin on transfère la pile de $n-1$ disques de l'aiguille β vers l'aiguille γ. Le coût de cette solution est $C_n = 2^n - 1$.

► On utilise un alphabet $\Sigma = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}\}$ pour coder les mouvements élémentaires (déplacements d'un disque), selon le tableau suivant :

1 vers 2	$\mathbf{a}$	2 vers 1	$\overline{\mathbf{a}}$
2 vers 3	$\mathbf{b}$	3 vers 2	$\overline{\mathbf{b}}$
3 vers 1	$\mathbf{c}$	1 vers 3	$\overline{\mathbf{c}}$

On note H_{2n} le mot codant la solution optimale pour le transfert de $2n$ disques de l'aiguille 1 vers l'aiguille 3 ; et H_{2n+1} le mot codant la solution optimale pour le transfert de $2n+1$ disques de l'aiguille 1 vers l'aiguille 2. Ainsi $H_0 = \varepsilon$, $H_1 = \mathbf{a}$ et $H_2 = \mathbf{a}\overline{\mathbf{c}}\mathbf{b}$.

Question 1 • Explicitez H_3.

► On note σ le morphisme défini par $\sigma(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, $\sigma(\mathbf{b}) = \mathbf{c}$, $\sigma(\mathbf{c}) = \mathbf{a}$, $\sigma(\overline{\mathbf{a}}) = \overline{\mathbf{b}}$, $\sigma(\overline{\mathbf{b}}) = \overline{\mathbf{c}}$ et $\sigma(\overline{\mathbf{c}}) = \overline{\mathbf{a}}$.

Question 2 • Montrez que si le mot x code le transfert d'une pile de disques de l'aiguille 1 vers l'aiguille 2, alors $\sigma(x)$ code le transfert de la même pile de l'aiguille 2 vers l'aiguille 3.

Question 3 • Établissez la relation $H_{2n+1} = H_{2n}\mathbf{a}\sigma^{-1}(H_{2n})$, ainsi qu'une relation analogue exprimant H_{2n+2} en fonction de H_{2n+1}.

Question 4 • Montrez que la suite de mots $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un mot infini $\mathcal{H}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathcal{H}_{6k+1} = \mathbf{a}$ et $\mathcal{H}_{6k+2} \in \{\mathbf{c}, \overline{\mathbf{c}}\}$
- $\mathcal{H}_{6k+3} = \mathbf{b}$ et $\mathcal{H}_{6k+4} \in \{\mathbf{a}, \overline{\mathbf{a}}\}$
- $\mathcal{H}_{6k+5} = \mathbf{c}$ et $\mathcal{H}_{6k+6} \in \{\mathbf{b}, \overline{\mathbf{b}}\}$

► On définit un morphisme φ par les relations suivantes :

$\varphi(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\overline{\mathbf{c}}$	$\varphi(\overline{\mathbf{a}}) = \mathbf{ac}$
$\varphi(\mathbf{b}) = \mathbf{c}\overline{\mathbf{b}}$	$\varphi(\overline{\mathbf{b}}) = \mathbf{cb}$
$\varphi(\mathbf{c}) = \mathbf{b}\overline{\mathbf{a}}$	$\varphi(\overline{\mathbf{c}}) = \mathbf{ba}$

Question 5 • Justifiez les relations $\varphi \circ \sigma = \sigma^{-1} \circ \varphi$ et $\varphi \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ \varphi$.

Question 6 • Établissez les deux relations :

$$\varphi(H_{2n})\mathbf{a} = H_{2n+1} \qquad \text{et} \qquad \varphi(H_{2n+1})\mathbf{b} = H_{2n+2}$$

Question 7 • Prouvez alors que $\mathcal{H}$ est le point fixe du morphisme φ.

Question 8 • Montrez que $\mathcal{H}$ ne contient pas quatre lettres consécutives non surlignées.

Question 9 • En déduire que $\mathcal{H}$ n'a pas de facteur carré.

Question 10 • Le langage $\{H_n : n \in \mathbb{N}\}$ est-il rationnel ?

FIN