Option Informatique en Spé MP et MP*
Un système de réécriture, d'après Jean-Michel Autebert

► On note $X = \{a, b\}$. Soient u et v deux éléments de X^* ; on note $u \to v$ s'il existe des mots s et s' tels que $u = sabas'$ et $v = sas'$, ou $u = sbabs'$ et $v = sbs'$. On note $u \xrightarrow{*} v$ s'il existe un naturel n et une suite $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de mots vérifiant $x_0 = u$, $x_n = v$ et $x_i \to x_{i+1}$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Question 1 • Montrez que $\xrightarrow{*}$ est une relation d'ordre ; cet ordre est-il total ?

Question 2 • Montrez que cet ordre est compatible avec la concaténation, en ce sens que si l'on a $u \xrightarrow{*} v$ et $u' \xrightarrow{*} v'$, alors $uu' \xrightarrow{*} vv'$.

Question 3 • Soient u, v et w trois mots tels que $u \to v$, $u \to w$ et $v \neq w$. Montrez qu'il existe un mot t tel que $v \to t$ et $w \to t$.

Question 4 • Soient u, v et w trois mots tels que $u \xrightarrow{*} v$ et $u \xrightarrow{*} w$. Montrez qu'il existe un mot t tel que $v \xrightarrow{*} t$ et $w \xrightarrow{*} t$.

► On note $u \leftrightarrow v$ si $u \to v$ ou $v \to u$. On note $u \overset{*}{\leftrightarrow} v$ s'il existe un naturel n et une suite $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de mots vérifiant $x_0 = u$, $x_n = v$ et $x_i \leftrightarrow x_{i+1}$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Question 5 • Il est clair que $u \xrightarrow{*} v$ implique $u \overset{*}{\leftrightarrow} v$. Exhibez un contre-exemple montrant que la réciproque est fausse.

Question 6 • Montrez que $\overset{*}{\leftrightarrow}$ est une relation d'équivalence. Existe-t-il des classes modulo $\overset{*}{\leftrightarrow}$ de cardinal fini ? Le nombre de classes modulo $\overset{*}{\leftrightarrow}$ est-il fini ?

► Un mot u est *irréductible* s'il n'existe aucun mot v (autre que u) tel que $u \xrightarrow{*} v$.

Question 7 • Montrez que l'ensemble R des mots irréductibles est un langage rationnel. Indication : on s'intéressera au complémentaire de R.

Question 8 • Soient u et v deux irréductibles. Montrez que si uv est réductible, sa réduction se fait en une étape exactement.

Question 9 • Montrez que, dans chaque classe modulo $\overset{*}{\leftrightarrow}$, il existe un et un seul mot irréductible. On dira que ce mot est le *réduit* de tous les membres de sa classe.

Question 10 • On note r_n le nombre de mots irréductibles de longueur n ; donnez une expression simple de r_n.

► Soit L un langage ; on note $\rho(L)$ l'ensemble des réduits des mots de L.

Question 11 • Déterminez $\rho(L_1)$, où L_1 est le langage décrit par l'expression rationnelle $(aab)^*$.

Question 12 • Déterminez $\rho(L_2)$, où L_2 est le langage décrit par l'expression rationnelle $(a(a+b)(a+b))^*$.

► Soit $\mathcal{A} = (Q, \delta, i, F)$ un automate fini reconnaissant un langage rationnel L. On applique à cet automate l'opération suivante : s'il existe des états j et k et un calcul valide étiqueté aba menant de j à k, on ajoute à δ la transition (j, a, k), si toutefois elle n'existe pas déjà ; sinon, s'il existe des états j et k et un calcul valide étiqueté bab menant de j à k, on ajoute à δ la transition (j, b, k), si toutefois elle n'existe pas déjà.

Question 13 • Montrez que l'on ne peut appliquer cette opération qu'un nombre fini de fois. On note $\mathcal{B}$ l'automate obtenu.

Question 14 • Montrez que tout mot reconnu par $\mathcal{B}$ est équivalent (modulo $\overset{*}{\leftrightarrow}$) à un mot reconnu par $\mathcal{A}$.

Question 15 • Montrez que si un mot u est reconnu par $\mathcal{A}$, alors le réduit de u est reconnu par $\mathcal{B}$.

Question 16 • Montrez que, si L est rationnel, alors $\rho(L)$ est lui aussi rationnel.

Source : problème 4 du livre de Jean-Michel AUTEBERT *Langages algébriques*, augmenté de quelques questions.

FIN