Une preuve élémentaire pour les nombres de Catalan

Les nombres de Catalan sont définis par $C_0 = 1$ et la relation de récurrence $C_{n+1} = \sum_{0\le k\le n} C_k C_{n-k}$. On se propose d'établir la relation $C_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ par une méthode élémentaire, ne faisant appel ni à des arguments analytiques comme le développement en série entière ou, plus simplement, l'observation du $DL_n(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$, ni à des arguments combinatoires (méthode de Désiré André). Les seules techniques requises sont la manipulation des $\sum$ et le raisonnement par récurrence, ce qui place cette preuve à la portée d'un élève de PCSI.

Notons $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$, $S_n = \sum_{0\le k\le n} a_k a_{n-k}$ et $\mathcal{A}(n)$ l'assertion $S_n = a_{n+1}$. Nous allons prouver, par récurrence sur n, que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout n. Il en résultera que les suites de termes généraux respectifs a_n et C_n, définies par les mêmes relations, sont identiques.

$\mathcal{A}(0)$ est vraie car $S_0 = a_1 = 1$. Supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise.

Notons $T_n = \sum_{0\le k\le n} k a_k a_{n-k}$. Avec le changement d'indice $k \to n-k$, on a: $T_n = \sum_{0\le k\le n} (n-k) a_k a_{n-k}$; donc $2T_n = nS_n$.

Nous noterons $\mathcal{F}(k)$ la formule suivante:

$$(k+2)a_{k+1} = \frac{(k+2)(2k+2)!}{(k+1)!(k+2)!} = \frac{2(2k+1)(2k)!}{k!(k+1)!} = 2(2k+1)a_k$$

On a:

$$\begin{aligned}
T_{n+1} + S_{n+1} &= \sum_{0\le k\le n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} \\
&= a_{n+1} + \sum_{1\le k\le n+1} (k+1) a_k a_{n+1-k} && \text{en isolant le terme d'indice 0} \\
&= a_{n+1} + \sum_{0\le k\le n} (k+2) a_{k+1} a_{n-k} && \text{avec le changement d'indice } k \to k-1 \\
&= a_{n+1} + 2\sum_{0\le k\le n} (2k+1) a_k a_{n-k} && \text{en appliquant la formule } \mathcal{F}(k) \\
&= a_{n+1} + 4\sum_{0\le k\le n} k a_k a_{n-k} + 2\sum_{0\le k\le n} a_k a_{n-k} \\
&= a_{n+1} + 4T_n + 2S_n = a_{n+1} + (2n+2)S_n && \text{car } 2T_n = nS_n \\
&= (2n+3)a_{n+1} && \text{avec l'hypothèse de récurrence}
\end{aligned}$$

Mais $T_{n+1} + S_{n+1} = \dfrac{n+3}{2} S_{n+1}$.

En rapprochant les deux expressions de $T_{n+1} + S_{n+1}$, on obtient $\dfrac{n+3}{2} S_{n+1} = (2n+3)a_{n+1}$ que l'on écrit $S_{n+1} = \dfrac{2(2n+3)a_{n+1}}{n+3}$ d'où $S_{n+1} = a_{n+2}$ avec la formule $\mathcal{F}(n+1)$. Ceci établit l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$ et termine donc la preuve.

Le Plessis-Trévise, le 10 janvier 1999