Option Informatique en Spé MP et MP*
Graphes : notions de base

Généralités

▶ Soit S un ensemble dont les éléments seront appelés *sommets*. Une *arête* est une paire $a = \{s, t\}$ d'éléments de S ; s et t sont les *extrémités* de a. Nous dirons que a est *incidente* à s et à t. Nous dirons également que s et t sont *voisins* lorsqu'ils sont reliés par une arête, et nous noterons ceci $s \leftrightarrow t$.

▶ Soit A un ensemble d'arêtes ; le couple $G = (S, A)$ est un *graphe non orienté*. Nous dirons que G est *fini* lorsque S l'est ; dans ce cas, A est lui aussi fini.

▶ Le *degré* d'un sommet s est le nombre d'arêtes incidentes à s ; c'est aussi le nombre des voisins de s, il est compris entre 0 (sommet isolé) et $|S| - 1$ (sommet relié à tous les autres).

▶ Un *chemin* de longueur $n \geqslant 0$ menant d'un sommet s à un sommet t est une suite $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ de sommets tels que $x_0 = s$, $x_n = t$ et $x_{i-1} \leftrightarrow x_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. s et t sont les *extrémités* du chemin. Un chemin $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est *élémentaire* si les sommets par lesquels il passe sont tous distincts, à l'exception éventuelle de x_0 et x_n.

▶ Un *cycle* est un chemin de longueur non nulle, dont les extrémités sont confondues. Nous dirons que le cycle est *élémentaire* lorsque le chemin sous-jacent est élémentaire et passe par au moins trois sommets distincts. Ainsi (s, t, s) n'est pas un cycle élémentaire.

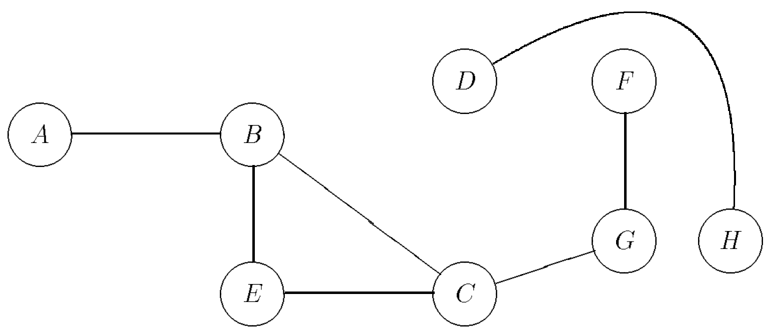

Figure 1: un exemple de graphe

▶ Le graphe de la figure 1 comporte huit sommets et sept arêtes. Le degré du sommet B est 3. On remarque un cycle de longueur 3, passant par B, C et E.

▶ Voici quelques graphes classiques à n sommets $x_1, \ldots, x_n$:

- le graphe complet K_n, dans lequel deux sommets quelconques sont reliés par une arête ;
- l'étoile S_n, de centre x_1 : les arêtes sont les paires $\{x_1, x_i\}$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$;
- le graphe filiforme P_n, dont les arêtes sont les paires $\{x_{i-1}, x_i\}$ pour $2 \leqslant i \leqslant n$;
- le cycle C_n, obtenu à partir du précédent en lui ajoutant l'arête $\{x_n, x_1\}$.

▶ Le *complémentaire* de $G = (S, A)$ est le graphe $\overline{G} = (S, \overline{A})$ où $\overline{A}$ est l'ensemble des arêtes qui n'appartiennent pas à A.

Distance, connexité

▶ Soient s et t deux sommets. Notons $s \overset{*}{\leftrightarrow} t$ lorsque s et t sont reliés par un chemin ; clairement, la relation $\overset{*}{\leftrightarrow}$ est une équivalence sur S. Si deux sommets sont reliés par un chemin, alors ils sont reliés par un chemin élémentaire, qui n'est pas nécessairement unique.

▶ Une *composante connexe* de G est une classe modulo $\overset{*}{\leftrightarrow}$. Un graphe est *connexe* s'il ne compte qu'une composante connexe ; ceci revient à dire que deux sommets quelconques sont toujours reliés par au moins un chemin.

▶ Définissons la *distance* $d(s,t)$ entre les deux sommets s et t d'un graphe G. Si $s \overset{*}{\leftrightarrow} t$, alors $d(s,t)$ est la longueur minimale d'un chemin reliant s et t ; sinon, $d(s,t) = +\infty$.

Remarque : si $d(s,t) < +\infty$, alors il existe un chemin élémentaire menant de s à t, et la longueur de ce chemin est $d(s,t)$.

▶ L'*excentricité* d'un sommet s du graphe $G = (S, A)$ est $e(s) = \max_{t \in S} d(s,t)$.

▶ Le *diamètre* de G est $D(G) = \max_{s \in S} e(s)$, son *rayon* est $R(G) = \min_{s \in S} e(s)$. Le *diamètre* d'un graphe G est la distance maximale entre deux de ses sommets. Ainsi, un graphe est connexe ssi son diamètre est fini. Le graphe de la figure 1 comporte deux composantes connexes, de diamètres respectifs 4 et 1.

Arbres

▶ Soit $G = (S, A)$ un graphe à n sommets. On rappelle que les assertions suivantes sont deux à deux équivalentes et constituent autant de définitions d'un *arbre* :

- G est connexe et acyclique ;
- G est connexe et comporte $n - 1$ arêtes ;
- G est acyclique et comporte $n - 1$ arêtes ;
- G est acyclique, mais ne le reste pas si on lui ajoute une arête ;
- G est connexe, mais ne le reste pas si on lui enlève une arête ;
- deux sommets quelconques de G sont reliés par un et un seul chemin élémentaire.

▶ Les *feuilles* d'un arbre sont les sommets de degré 1 ; les autre sommets sont appelés *nœuds*. Dans un arbre (fini) il y a au moins deux feuilles.

FIN