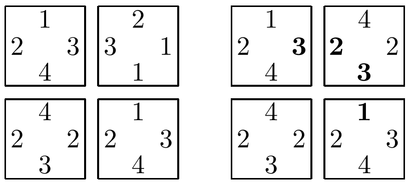
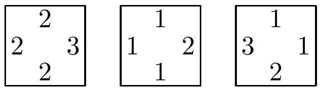
Option Informatique en Spé MP et MP*
TP : pavages du plan

1 Partie théorique, avec une question de programmation

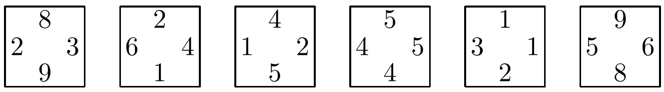
▶ On se propose de paver le plan au moyen de dalles carrées. Chaque dalle porte, sur chacun de ses côté, un motif (représenté par un nombre dans la suite). On dispose d'une infinité d'exemplaires de chaque modèle de dalle, mais il n'y a qu'un nombre fini de ces modèles. Les dalles ont une orientation : il est interdit de les faire tourner. De plus, le pavage doit respecter la contrainte «pas de conflits de voisinage» illustrée par la figure ci-dessous, dans laquelle la portion de pavage de gauche est licite, alors que celle de droite est interdite (on a **graissé** les motifs de/en conflit) :



Question 1 • Peut-on paver le plan avec le jeu de dalles suivant :



Question 2 • Peut-on paver le plan avec le jeu de dalles suivant :



Question 3 • On a défini le `type dalle = {h:int; b:int; g:int; d:int}`. Rédigez en Caml une fonction :

```
pavage_rectangle : int -> int -> dalle list -> dalle vect vect
```

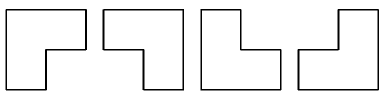
spécifiée comme suit : `pavage_rectangle p q catalogue` calcule un pavage d'un rectangle de largeur `p` et de hauteur `q`, en utilisant les modèles de dalles énumérés dans `catalogue` (de type `dalle list`) ; on lèvera une exception si un tel pavage n'existe pas.

Question 4 • On considère un arbre $\mathcal{T}$ de racine r ; les nœuds de $\mathcal{T}$ sont tous d'arité finie. Montrez que si $\mathcal{T}$ compte une infinité de nœuds, il existe un chemin infini partant de r.

Question 5 • À quel couple célèbre la preuve que vous venez de donner pour la question précédente vous fait-elle penser ? La réponse n'est pas *Roméo et Juliette*.

Question 6 ⋆⋆⋆ • Montrez que si l'on peut paver le quart de plan $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, alors on peut paver le plan entier.

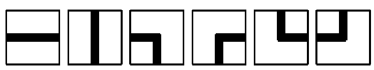
▶ On utilise maintenant des *triominos* : ce sont des dalles en forme de `L` ; il en existe quatre modèles différents, qui se déduisent l'un de l'autre par rotation d'angle $k\pi/2$:



Question 7 • Montrez qu'avec des triominos, on peut paver tout carré de côté 2^n auquel on a enlevé une case.

Question 8 • Montrez qu'avec des triominos, on peut paver le plan entier.

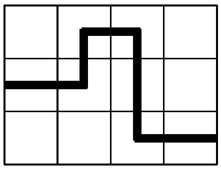
▶ On dispose maintenant du jeu de dalles suivant :



Question 9 ⋆⋆⋆ • Avec ce jeu de dalles, est-il possible de paver le plan de telle façon que l'on puisse aller de la case $(0, 0)$ à une case (i, j) quelconque en suivant un «chemin» matérialisé sur les dalles par le trait gras ?

2 Suggestions de programmes

► Pavons un rectangle $p \times q$ avec les dalles du jeu précédent (plus une dalle sans marque) choisies aléatoirement ; il se peut qu'un chemin formé de dalles marquées mène du bord gauche au bord droit. Voici un exemple :

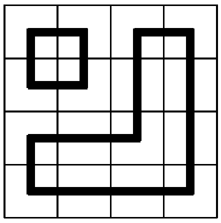


Question 10 Écrivez un programme qui réalise un tel pavage aléatoire.

Question 11 Écrivez un programme qui teste l'existence d'un chemin menant du bord gauche au bord droit.

Question 12 Estimez (expérimentalement) la probabilité qu'un tel chemin existe. Le résultat semble-t-il dépendre des valeurs de p et q ?

► Considérons un pavage est obtenu en n'utilisant que les quatre dalles marquées d'un angle droit, placées de façon à former un (ou plusieurs) chemins fermés ; en voici un exemple :



Nous dirons qu'un tel pavage est *clos*. Supposons que l'on ait pavé (sans précautions particulières) un pavé $p \times q$ (avec p et q pairs), en utilisant les quatre dalles considérées. En général, le motif obtenu n'est pas clos ; mais (avec un peu de chance), on peut le transformer en pavage clos, en échangeant certaines dalles.

Question 13 Quelles conditions doit vérifier le pavage pour que cette transformation soit possible ? Ces conditions sont-elles suffisantes ?

Question 14 Proposez un algorithme (et un programme) qui réalise cette transformation.

► Allez sur le Web pour savoir ce que sont les pavages de TRUCHET, et écrivez un programme qui dessine de tels pavages.

FIN